Jedna primjena

poznatih osobina Fibonaccijevih[1] brojeva

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH
Alija Muminagić, F. Nykøbing, Danska

U ovom kraćem članku prikazat ćemo rješenje jednog zanimljivog zadatka (pripada donekle zabavnoj matematici, ali nije pristupačan većini rješavatelja) primjenjujući samo par poznatih osobina **Fibonaccijevih brojeva**. Čitateljima zdušno preporučujemo knjigu [3] kako bi podrobnije upoznali Fibonaccijeve brojeve.

Riječ je o sljedećem zadatku:

Obitelj čine muž, žena i dvoje djece. Dok djeca u dvorištu voze bicikle, muž i žena razgovaraju:

Muž: Primijetio sam nešto zanimljivo u odnosu tvojih i mojih godina starosti, a to je da je odnos tvojih i mojih godina jednak odnosu mojih godina i zbroja naših godina umanjenog za jedan.

Žena: Tu ne vidim baš ništa zanimljivo, to su samo neki razlomci.

Muž: Da, ali je zanimljivo da to isto vrijedi i za godine starosti naše djece.

Žena: To je već zanimljivo, ali napominjem ti da riječi "godine starosti" zamijeniš prikladnijim, jer npr. dijete od godinu dana nije "staro".

Muž: Možda imaš pravo, kažem možda, jer ja nisam stručnjak za jezik. Pitam se mogu li naši prijatelji, kada im ponovim ovaj naš razgovor, prema njemu odrediti godine starosti svakog od nas četvoro?

Žena: Mislim da mogu.

Sada ćemo dati rješenje ovog zadatka koristeći **Fibonaccijeve brojeve**. Niz brojeva $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ za koji je $F_1 = 1,\ F_2 = 1$, te

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad (1)$$

naziva se **Fibonaccijev niz**.

[1] Leonardo Pisano Fibonacci (1170. – 1240.), talijanski matematičar (glavno djelo mu je *Liber Abaci* iz 1202. godine).

Dakle, zbog (1) radi se o sljedećem nizu brojeva:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots.$$

Zanima li nas primjerice F_{20}, moramo izračunati iz (1) puno brojeva prije ovog broja. Postavlja se opravdano pitanje o neophodnosti, odnosno možemo li za dani prirodan broj n direktno izračunati F_n bez računanja $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$. Odgovor na ovo pitanje je potvrdan zahvaljujući tzv. **Binetovoj**[2] **formuli** koja glasi:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \quad (2)$$

Ova formula se lako dokazuje pomoću matematičke indukcije i taj dokaz se može naći u [3].

Dalje ćemo koristiti i **Cassinijev**[3] **identitet** koji glasi:

$$F_{n+1}^2 - F_n \cdot F_{n+2} = (-1)^n. \quad (3)$$

Dokaz ovog identiteta pomoću matematičke indukcije također se može naći u [3].

Jedna od posljedica formule (2) je da količnici uzastopnih Fibonaccijevih brojeva teže ka zlatnom presjeku:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi, \quad (4)$$

gdje je $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803988749894\ldots$ zlatni presjek. Ovaj broj se osim u matematici sreće u biologiji, arhitekturi, slikarstvu i psihologiji.

Sada ćemo prijeći na rješavanje našeg zadatka. Uvodimo sljedeće oznake: x – godine starosti žene, y – godine starosti muža. Prema uvjetima iz zadatka je:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{(x+y)-1} \quad (5)$$

i odavde:

$y^2 = x^2 + xy - x$, tj. nakon dijeljenja s x^2:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x}. \quad (6)$$

Logično je pretpostaviti da roditelji imaju više od 20 godina, što povlači da je $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{20} = 0.05$. To pak znači da u (6) možemo zanemariti član $\dfrac{1}{x}$, pa je tada:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right) - 1 = 0,$$

a odavde stavljajući da je $\dfrac{y}{x} = \phi$ (kvadratna jednadžba):

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

jer su x i y godine starosti, tj. $x, y > 0$.

Na osnovu (4), tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$, stavljajući da je:

$$x = kF_n; \quad y = kF_{n+1} \quad (7)$$

gdje je $k > 0$, dobivamo:

$$\frac{y}{x} = \frac{kF_{n+1}}{kF_n}. \quad (8)$$

Uvrštavajući (7) i (8) u (5), dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{kF_{n+1}}{k(F_n + F_{n+1}) - 1} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{k(F_n + F_{n+1}) - 1}{kF_{n+1}} \\
\Leftrightarrow\ &kF_{n+1}^2 = kF_n^2 + kF_nF_{n+1} - F_n \\
\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ &kF_{n+1}^2 = kF_n^2 + kF_n(F_{n+2} - F_n) - F_n \\
\Leftrightarrow\ &k\left(F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2}\right) = -F_n
\end{aligned}$$

$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} k \cdot (-1)^n = -F_n. \quad (9)$$

Iz (9) slijedi da je n neparan broj i tako je:

$$k = F_n, \quad \text{te} \quad (10)$$

$$x = kF_n \overset{(10)}{=} F_n^2 \quad \text{i}$$

$$y = kF_{n+1} \overset{(10)}{=} F_nF_{n+1},$$

[2] Jacques Phillipe Marie Binet (1786. – 1856.), francuski matematičar.
[3] Jean Dominique Cassini (1625. – 1712.), francuski matematičar.

pa imamo (jer je n neparan broj):

$$(F_1^2, F_1F_2) = (1,1);$$
$$(F_3^2, F_3F_4) = (4,6);$$
$$(F_5^2, F_5F_6) = (25,40);$$
$$(F_7^2, F_7F_8) = (169,273), \ldots .$$

Sada lako zaključujemo da parovi $(1,1)$ i $(169,273)$ nisu rješenja (prvi par otpada jer u zadatku djeca voze bicikle, a drugi par naravno otpada jer je to previše godina starosti za roditelje). Konačno rješenje je prema tome: žena ima 25 godina, muž 40 godina i djeca 4 i 6 godina, tj. u pitanju su parovi $(25,40)$ i $(4,6)$.

Napomena: Recimo još da dobivena jednadžba (5), tj. $y^2 - x^2 - xy + x = 0$; $(x, y \in \mathbf{N})$ predstavlja **Diofantsku**[4] **jednadžbu** koja se može riješiti (nešto teže) ukoliko čitaoci ovog članka poznaju dobro tehniku rješavanja nelinearnih Diofantskih jednadžbi. Za ovo preporučujemo knjigu [1].

LITERATURA

1/ Andreescu, T., Andrica, D., *Introduction to Diophantine Equations*, Gil Publishing House, Zalau, 2002.

2/ Arslanagić, Š., *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

3/ Dujella, A., *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo (Matkina biblioteka), Zagreb, 2000.

4/ Kadelburg, Z., Mićić, V., Janković, V., *Materijali za mlade matematičare, sv. 8 (Elementarna teorija brojeva, Dirihleov princip, Diferencne jednačine)*, Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije; Beograd, 1976.

5/ Kisačanin, B., *Mala matematika*, Univerzitet u Novom Sadu i MP "Stylos" Novi Sad, Novi Sad, 1995.

[4] Diofant, starogrčki matematičar iz 3. stoljeća nove ere.