Problem triju znamenaka 9

Anđelko Marić, Sinj

U danskom časopisu *Matematik magasinet* br. 51, od travnja 2010. postavljen je problem: kako napisati (neke) prirodne brojeve s pomoću točno triju znamenaka 9. Pritom se mogu koristiti znakovi osnovnih računskih radnji i oznake elementarnih funkcija.

Skriv med ens cifre

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Det er en gammel opgave at skrive så mange hele tal som muligt med 4 4-taller. Man kan også vælge at bruge 9-taller. Skriv så mange hele tal som muligt ved hjælp ag 3 9-taller og de sædvanlige regnetegn. Her er nogle eksempler

$1=\left(\frac{9}{9}\right)^9$	$2=\frac{9+9}{9}$	$3=\sqrt{9}+9-9$
$4=\sqrt{9}+\frac{9}{9}$	$5=\left(\sqrt{9}\right)!-\frac{9}{9}$	$6=9-\frac{9}{\sqrt{9}}$
$7=$	$8=9-\frac{9}{9}$	$9=\sqrt[9]{9^9}$
$10=9+\frac{9}{9}$	$11=\frac{99}{9}$	$12=9+\frac{9}{\sqrt{9}}$

Er 7 et umuligt tal, som ikke kan skrives ved hjælp af 3 9-taller?

Henvisning

Martin Perkins: time (Symmetry-Plus 41, Spring 2010)

U tekstu članka dano je rješenje za brojeve od 1 do 12, s iznimkom broja 7, što se vidi iz preslika. Ujedno se sugerira čitateljima da to isto učine i za broj 7, a ne zna se je li to uopće moguće.

Nije teško zaključiti da među tako napisanim prirodnim brojevima postoji najveći. To znači da se svaki prirodan broj ne može napisati s pomoću triju znamenaka 9.

Problem me zainteresirao i došao sam do nekih zaključaka:

1. Postoji takav zapis za broj 7.
2. Postoje još neki načini za zapise navedenih brojeva.
3. Broj 0 može se također napisati na propisani način.
4. Svaki prirodni broj n, $12 < n \leq 21$ može se napisati s pomoću triju znamenaka 9.

Isto tako pokušao sam to učiniti i za višekratnike broja 10 koji nisu veći od 100. To sam samo djelomično uspio, to jest za brojeve 50 i 70 nisam našao rješenje.

Evo tih rezultata i vjerujem da to nisu svi mogući zapisi.

$$
\begin{aligned}
0 &= 9-\sqrt{9}-(\sqrt{9})! = \frac{9-9}{9} = (9-9)\cdot 9\\
&= (\sqrt{9})! - \sqrt{9} - \sqrt{9};\\
1 &= \frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}}{9} = 9^{9-9} = \log_9 \sqrt{9\cdot 9};\\
2 &= \sqrt{9} - \frac{9}{9} = \log_9 (9\cdot 9) = \log_{\sqrt{9}} \left(\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}\right);\\
3 &= \frac{\sqrt{9}\cdot 9}{9} = \sqrt{\frac{9\cdot 9}{9}} = \frac{9+9}{(\sqrt{9})!};\\
4 &= \frac{(\sqrt{9})! + (\sqrt{9})!}{\sqrt{9}} = \sqrt{9} + \log_9 9\\
&= \log_{\sqrt{9}} (9\cdot 9);\\
5 &= (\sqrt{9})! - (9-9)! = (\sqrt{9})! - \log_9 9\\
&= \sqrt{9} + \log_{\sqrt{9}} 9 = 9 - \log_{\sqrt{\sqrt{9}}} 9;\\
6 &= \frac{9+9}{\sqrt{9}} = 9 + \sqrt{9} - (\sqrt{9})!\\
&= \frac{(\sqrt{9})!\cdot(\sqrt{9})!}{(\sqrt{9})!} = (\sqrt{9})! \cdot \frac{9}{9};\\
7 &= (\sqrt{9})! + \frac{9}{9} = (\sqrt{9})! + \log_9 9\\
&= 9 - \log_{\sqrt{9}} 9 = \sqrt{9} + \log_{\sqrt{\sqrt{9}}} 9;\\
8 &= 9 - \log_9 9 = (\sqrt{9})! + \log_{\sqrt{9}} 9;\\
9 &= 9+9-9 = 9\cdot\frac{9}{9} = \sqrt{9}+\sqrt{9}+\sqrt{9}\\
&= (\sqrt{9})! + \frac{9}{\sqrt{9}} = 9\cdot\log_9 9 = 9^{\log_9 9} = \log_9 9^9;\\
10 &= 9 + \log_9 9 = (\sqrt{9})! + \log_{\sqrt{\sqrt{9}}} 9;\\
11 &= 9 + \log_{\sqrt{9}} 9;\\
12 &= 9 + (\sqrt{9})! - \sqrt{9} = \sqrt{9} + \sqrt{9} + (\sqrt{9})!\\
&= \frac{(\sqrt{9})!\cdot(\sqrt{9})!}{\sqrt{9}} = 9 + 9 - (\sqrt{9})!;\\
13 &= 9 + \log_{\sqrt{\sqrt{9}}} 9;\\
14 &= (\sqrt{9})! + \log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{9}}}} 9;\\
15 &= 9 + \sqrt{9} + \sqrt{9} = 9 + 9 - \sqrt{9}\\
&= (\sqrt{9})! + (\sqrt{9})! + \sqrt{9};\\
16 &= \log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{9}}}} (9\cdot 9) = \sqrt[\log 9]{9} + (\sqrt{9})!;\\
17 &= 9 + \log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{9}}}} 9;\\
18 &= \left(\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)\cdot\sqrt{9} = 9 + (\sqrt{9})! + \sqrt{9}\\
&= 9\cdot\log_{\sqrt{9}} 9;\\
19 &= \sqrt{9} + \log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{9}}}}} 9 = 9 + 9.\dot{9}\\
&= \sqrt[\log 9]{9} + 9;\\
20 &= \frac{((\sqrt{9})!)!}{(\sqrt{9})!\cdot(\sqrt{9})!} = \binom{\sqrt{9}+\sqrt{9}}{\sqrt{9}}\\
&= \binom{(\sqrt{9})!}{\sqrt{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}}} = \binom{9-\sqrt{9}}{\sqrt{9}};\\
21 &= 9 + 9 + \sqrt{9} = 9 + (\sqrt{9})! + (\sqrt{9})!\\
&= \left(\sqrt{9}\right)^{\sqrt{9}} - (\sqrt{9})!;\\
30 &= \sqrt{9}\cdot 9 + \sqrt{9} = (\sqrt{9})!\cdot(\sqrt{9})! - (\sqrt{9})!;\\
40 &= \frac{((\sqrt{9})!)!}{9+9};\\
50 &= ?\\
60 &= 9\cdot(\sqrt{9})! + (\sqrt{9})! = (\sqrt{9})!\cdot 9.\dot{9}\\
&= \frac{((\sqrt{9})!)!}{(\sqrt{9})! + (\sqrt{9})!};\\
70 &= ?\\
80 &= \frac{((\sqrt{9})!)!}{\sqrt{9} + (\sqrt{9})!} = \frac{((\sqrt{9})!)!}{\sqrt{9\cdot 9}};\\
90 &= 9\cdot 9 + 9 = 99 - 9;\\
100 &= 99.\dot{9} = \sqrt[\log 9]{9\cdot 9}.
\end{aligned}
$$

Kako vidimo, za neke brojeve postoji jednostavno rješenje, a za neke treba malo više domišljatosti.

Prepušta se čitatelju da pokuša naći zapis za brojeve 50 i 70.

Za brojeve $50 + 70 = 120$ i $210 = 70 \cdot 3$ takvi zapisi postoje, što se također prepušta čitatelju.