Više rješenja

jednog trigonometrijskog zadatka

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH
Alija Muminagić, Nykøbing F., Danska

Zadaci s više načina rješavanja veoma su dobro sredstvo za aktivnije razmišljanje učenika i djelotvornije ponavljanje i utvrđivanje stečenog znanja. Nastavnici matematike o ovom momentu trebaju voditi računa, osobito kada je u pitanju rad s nadarenim učenicima i njihove pripreme za razna matematička natjecanja. Iz osobnog iskustva, u radu s takvim učenicima, možemo odgovorno reći da su vrlo često rješenja učenika bila elegantnija i ljepša od onih koja smo imali u vidu. Ovim učenici stječu potrebnu sigurnost i samopouzdanje.

Sada ćemo navesti jedan zanimljiv zadatak iz trigonometrije i dati njegovih šest rješenja, i to tri algebarska i tri geometrijska, pretpostavljajući pritom da učenici solidno poznaju važne činjenice iz trigonometrije i geometrije.

Riječ je o sljedećem zadatku:

Zadatak. Dokazati da vrijedi jednakost:

$$\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 80^\circ.$$

Rješenje 1. Imamo da iz:

$$\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 80^\circ$$

slijedi:

$$\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ - (\operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ) = 0. \quad (1)$$

Dokažimo sada (1). Dobivamo redom:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ - (\operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ) \\
&= \left(\text{zbog } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\right) \\
&= \frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} - \left(\frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} - \frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ}\right) \\
&= \frac{\sin 70^\circ \cos 60^\circ + \cos 70^\circ \sin 60^\circ}{\cos 70^\circ \cos 60^\circ} \\
&\quad - \frac{\sin 80^\circ \cos 50^\circ - \cos 80^\circ \sin 50^\circ}{\cos 80^\circ \cos 50^\circ} \\
&= (\text{zbog } \sin x \cos y \pm \cos x \sin y = \sin(x \pm y))
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin 130^\circ}{\cos 60^\circ \cos 70^\circ} - \frac{\sin 30^\circ}{\cos 50^\circ \cos 80^\circ}$$

$= \Big($zbog $\sin x = \sin(180^\circ - x),\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

i $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\Big)$

$$= \frac{2\sin 50^\circ}{\cos 70^\circ} - \frac{1}{2\cos 50^\circ \cos 80^\circ}$$

$$= \frac{4\sin 50^\circ \cos 50^\circ \cos 80^\circ - \cos 70^\circ}{2\cos 50^\circ \cos 70^\circ \cos 80^\circ} = 0.$$

Preostaje nam da dokažemo da je (zbog $2\cos 50^\circ \cos 70^\circ \cos 80^\circ \neq 0$):

$$4\sin 50^\circ \cos 50^\circ \cos 80^\circ - \cos 70^\circ = 0.$$

Imamo da je:

$4\sin 50^\circ \cos 50^\circ \cos 80^\circ - \cos 70^\circ$

$= 2 \cdot 2\sin 50^\circ \cos 50^\circ \cos 80^\circ - \cos 70^\circ$

$=$ (zbog $2\sin x \cos x = \sin 2x$)

$= 2\sin 100^\circ \cos 80^\circ - \cos 70^\circ$

$=$ (zbog $\sin x = \sin(180^\circ - x)$)

$= 2\sin 80^\circ \cos 80^\circ - \cos 70^\circ$

$= \sin 160^\circ - \cos 70^\circ$

$=$ (zbog $\cos(90^\circ - x) = \sin x$)

$= \sin 20^\circ - \sin 20^\circ = 0.$

Rješenje 2. Imamo:

$\mathrm{tg}50^\circ + \mathrm{tg}\,60^\circ + \mathrm{tg}\,70^\circ$

$$= \frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} + \mathrm{tg}\,70^\circ$$

$$= \frac{\sin 50^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 50^\circ}{\cos 50^\circ \cos 60^\circ} + \mathrm{tg}\,70^\circ$$

$=$ (zbog $\mathrm{tg}(90^\circ - x) = \mathrm{ctg}\,x$)

$$= \frac{\sin 110^\circ}{\frac{1}{2}\cos 50^\circ} + \mathrm{ctg}\,20^\circ = \frac{2\sin 70^\circ}{\cos 50^\circ} + \mathrm{ctg}\,20^\circ$$

$= \Big(\sin(180^\circ - x) = \sin x,\ \sin(90^\circ - x) = \cos x,$

$\cos(90^\circ - x) = \sin x$ i $\mathrm{ctg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x}\Big)$

$$= \frac{2\cos 20^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{2\cos 20^\circ}{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{1}{\sin 20^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1 + \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$= \Big($zbog $\frac{1 + \cos x}{\sin x} = \mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}\Big) = \mathrm{ctg}\,10^\circ$

$=$ (zbog $\mathrm{ctg}(90^\circ - x) = \mathrm{tg}\,x$) $= \mathrm{tg}\,80^\circ$.

Rješenje 3. Imamo:

$\mathrm{tg}50^\circ + \mathrm{tg}\,60^\circ + \mathrm{tg}\,70^\circ$

$= \mathrm{tg}(60^\circ - 10^\circ) + \mathrm{tg}\,60^\circ + \mathrm{tg}(60^\circ + 10^\circ)$

$= \Big($zbog $\mathrm{tg}(x - y) = \frac{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y}{1 + \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y};$

$\mathrm{tg}(x + y) = \frac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{1 - \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y},\ \mathrm{tg}\,60^\circ = \sqrt{3}\Big)$

$$= \frac{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\,10^\circ}{1 + \sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}\,10^\circ} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3} + \mathrm{tg}\,10^\circ}{1 - \sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}\,10^\circ}$$

$=$ (stavljajući da je $\mathrm{tg}\,10^\circ = a$)

$$= \frac{\sqrt{3} - a}{1 + a\sqrt{3}} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3} + a}{1 - a\sqrt{3}}$$

$=$ (nakon sređivanja)

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{3 - a^2}{1 - 3a^2}. \tag{2}$$

Iz $\mathrm{tg}\,3x = \frac{3\,\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}^3\,x}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\,x}$ slijedi da je $\mathrm{tg}\,30^\circ = \mathrm{tg}(3 \cdot 10^\circ) = \frac{3 \cdot \mathrm{tg}\,10^\circ - \mathrm{tg}^3\,10^\circ}{1 - 3 \cdot \mathrm{tg}^2\,10^\circ}$, tj. zbog $\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i $\mathrm{tg}\,10^\circ = a$,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2} = a \cdot \frac{3 - a^2}{1 - 3a^2}$$

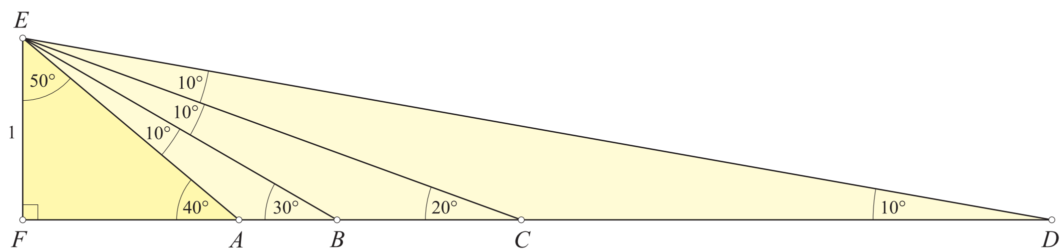
i odavde:
$$a = \frac{1 - 3a^2}{\sqrt{3}\,(3 - a^2)},$$

odnosno:
$$\frac{1}{a} = \sqrt{3} \cdot \frac{3 - a^2}{1 - 3a^2}, \tag{3}$$

pa iz (2) i (3) dobivamo:

$$\mathrm{tg}\,50^\circ + \mathrm{tg}\,60^\circ + \mathrm{tg}\,70^\circ = \frac{1}{a} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,10^\circ}$$

$$= \mathrm{ctg}\,10^\circ = \mathrm{tg}\,80^\circ.$$



Slika 1.

Rješenje 4. Neka je trokut EFA pravokutan, $\sphericalangle F = 90°$, $\sphericalangle FEA = 50°$, $|EF| = 1$ i neka je $\sphericalangle AEB = \sphericalangle BEC = \sphericalangle CED = 10°$ (slika 1.).

Tako je $|FA| = \operatorname{tg} 50°$, $|FB| = \operatorname{tg} 60°$, $|FC| = \operatorname{tg} 70°$ i $|FD| = \operatorname{tg} 80°$. Dakle, mi trebamo dokazati da je $|FA| + |FB| + |FC| = |FD|$. Prema slici 1. imamo da je $|FD| = |FA| + |AB| + |BC| + |CD|$.

Dakle:

$$
\begin{aligned}
&|FD| = |FA| + |FB| + |FC| = |FA| + |AB| + |BC| + |CD| \\
&\iff |AB| + |BC| + |CD| = |FB| + |FC| \\
&\iff |AB| + |BC| + |CD| = |FA| + |AB| + |FB| + |BC| \\
&\iff |CD| = |FA| + |FB| \\
&\iff |CD| = |FA| + |FA| + |AB| \\
&\iff |CD| = 2|FA| + |AB| \\
&\iff (\text{jer je } |FA| = |AE| \sin 50°, \text{ iz trokuta } EFA) \\
&\iff |CD| = 2|AE| \sin 50° + |AB|.
\end{aligned}
$$

Teorem o sinusima primijenjen na trokut ABE daje:

$$\frac{|AE|}{\sin \sphericalangle ABE} = \frac{|BE|}{\sin \sphericalangle EAB} = \frac{|AB|}{\sin 10°},$$

odnosno:

$$\frac{|AE|}{\sin 30°} = \frac{|BE|}{\sin 140°} = \frac{|AB|}{\sin 10°}$$

i odavde je zbog $\sin x = \sin(180° - x)$:

$$|AE| = \frac{|BE| \sin 30°}{\sin 140°} = \frac{|BE|}{2 \sin 40°} \quad \text{i} \quad |AB| = \frac{|BE| \sin 10°}{\sin 40°},$$

pa je:

$$
\begin{aligned}
|CD| &= 2 \frac{|BE| \sin 50°}{2 \sin 40°} + \frac{|BE| \sin 10°}{\sin 40°} \\
&= |BE| \frac{\sin 50° + \sin 10°}{\sin 40°}.
\end{aligned}
$$

Teorem o sinusima primijenjen na trokut BCE daje:

$$
\begin{aligned}
&\frac{|BE|}{\sin 20°} = \frac{|CE|}{\sin 150°} \\
&\iff |BE| = \frac{|CE| \sin 20°}{\sin 30°} = 2|CE| \sin 20°
\end{aligned}
$$

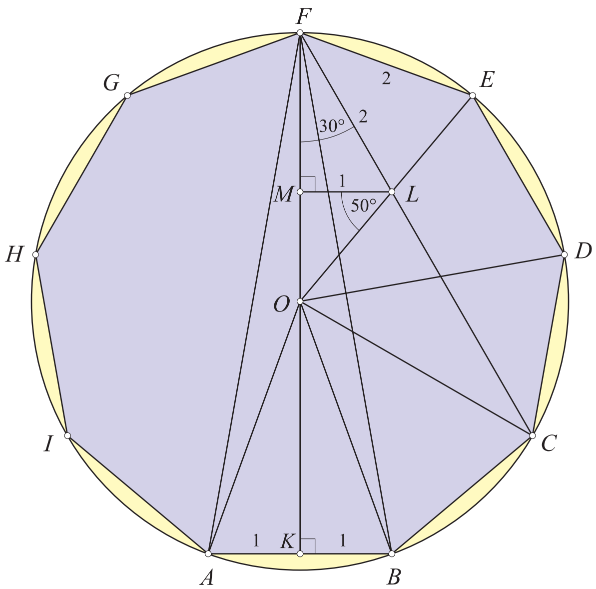
i sada je:

$$
\begin{aligned}
|CD| &= 2|CE| \sin 20° \frac{\sin 50° + \sin 10°}{\sin 40°} \\
&= 2|CE| \sin 20° \frac{2 \sin 30° \cos 20°}{2 \sin 20° \cos 20°} \\
&= 2|CE| \sin 30° = 2|CE| \frac{1}{2} = |CE|,
\end{aligned}
$$

a to je točno jer je trokut CDE jednakokračan pa je točna i ekvivalentna jednakost $|FD| = |FA| + |FB| + |FC|$, tj. $\operatorname{tg} 80° = \operatorname{tg} 50° + \operatorname{tg} 60° + \operatorname{tg} 70°$.

Rješenje 5. Neka je $ABCDEFGHI$ pravilan 9-terokut s duljinom stranice 2 upisan u kružnicu, sa središtem u točki O i neka je točka K projekcija točke O na stranicu $\overline{AB}$ karakterističnog trokuta OAB (sika 2.). Kutovi u karakterističnom trokutu su $\sphericalangle AOB = 40°$, $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = 70°$, $\sphericalangle OAK = 20°$ i $|AK| = |KB| = 1$. Dalje je $\sphericalangle AFO = 10°$ (kao vanjski kut nad unutarnjim kutom $\sphericalangle AOK = 20°$) i kako je trokut AOF jednakokračan, to je i $\sphericalangle OAF = 10°$ pa je $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BAO + \sphericalangle OAF = 70° + 10° = 80°$ i zbog $|AK| = 1$ slijedi da je $\operatorname{tg} 80° = |FK|$ (vidi trokut AFK).

U trokutu OAK je $\operatorname{tg} 70° = |OK|$. Dalje je $\sphericalangle OFC = 30°$ (kao vanjski kut nad unutarnjim kutom $\sphericalangle KOC = 20° + 40° = 60°$). Točku presjeka dužina $|OE|$ i $|CF|$ označimo s L, a njezinu



Slika 2.

projekciju na OF s M. Lako se pokaže da je u trokutu FLE, kut $\sphericalangle FLE = 70°$ pa zbog $\sphericalangle FEL = 70°$ slijedi da je trokut FLE jednakokračan, tj. $|FL| = |FE| = 2$. Trokut MLF je pravokutan pa zbog $\sphericalangle MFL = 30°$ i $|FL| = 2$ slijedi da je $|ML| = 1$ i osim toga je kut $\sphericalangle FLM = 60°$. Zato je $\operatorname{tg} 60° = |FM|$.

U trokutu OLM je kut $\sphericalangle MOL = 40°$, $\sphericalangle OML = 90°$, pa je kut $\sphericalangle OLM = 50°$ i tako je $\operatorname{tg} 50° = |OM|$. Konačno je $|FK| = |OM| + |FM| + |OK|$, tj. $\operatorname{tg} 80° = \operatorname{tg} 50° + \operatorname{tg} 60° + \operatorname{tg} 70°$.

Rješenje 6. Neka je dan jednakokračan trokut BCF u kojem je kut $\sphericalangle BCF = \sphericalangle BFC = 40°$. Tada je kut $\sphericalangle FBC = 100°$ (slika 3.). Konstruirajmo kut $\sphericalangle CBA = 30°$ (kao na slici 3.) i neka je točka D projekcija točke A na stranicu $\overline{BC}$ trokuta BCF i neka je $|AD| = 1$. Tada je $|AB| = 2$. U točki E koja je središte dužine AB konstruiramo okomicu EF i kut $\sphericalangle FBG = 10°$, gdje je točka G sjecište okomice EF i jednog kraka kuta $\sphericalangle FBG$. Ostali kutovi imaju mjere kao na slici 3.

Sada imamo:

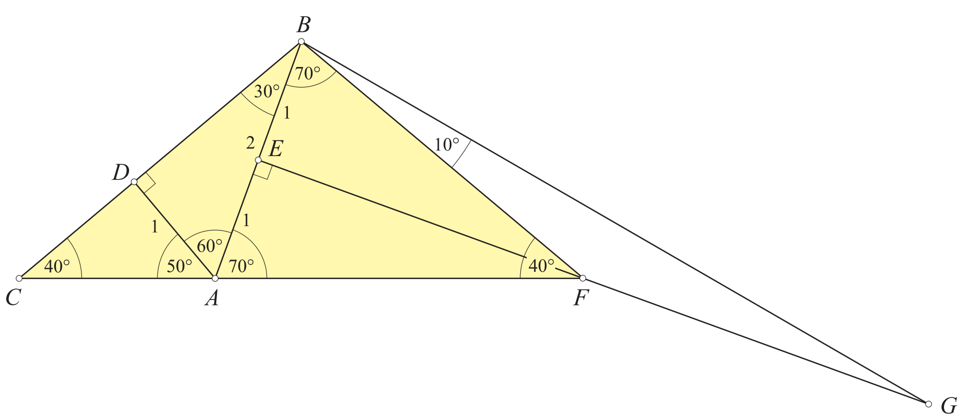
$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} 80° &= |GE| = |GF| + |FE| = |FB| + |FE| \\
&= |CB| + |FE| = |CD| + |DB| + |FE| \\
&= \operatorname{tg} 50° + \operatorname{tg} 60° + \operatorname{tg} 70°.
\end{aligned}
$$

LITERATURA

1/ Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

2/ J. Carstensen, A. Muminagić, *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Triangle, Vol. 1 (1997.), 87–88.

3/ D. Miles, C. Pritchard, *Three Trigonometric Results from a Regular Nonagon*, Mathematics in School, November 2008., Vol. 37, No. 5.



Slika 3.