

Majmun i kokosovi orasi



Branimir Dakić, Zagreb

U nizu brojnih matematičkih zagonetki čije je rješavanje privuklo pozornost i laika i matematičara znanstvenika jest i zagonетка o majmunu i kokosovim orasima.

Pojavila se 9. listopada 1926. u *The Saturday Evening Postu* kao kratka priča američkog spisatelja Bena Amesa Williamsa¹. *The Saturday Evening Post* dugovječni je tradicionalni američki časopis. Izlazi od 1821. godine i objavljuje raznovrsne tekstove, od komentara aktualnih događaja, kratkih priča poznatih pisaca, stripova, humora itd.

Izvorno zagonетка potječe iz Indije. Brojne su njezine inačice, primjerice Krantzov *Problem podjele ukradenih dijamanta*² ili Gannonov problem *Majmun i banane*³.

No vratimo se priči o majmunu i kokosovim orasima. Premda nimalo jednostavna za prosječnog čitatelja, ali ipak vrlo izazovna, zagonетка ispričana u toj priči potaknula je mnoge na rješavanje pa je u kratkom roku na adresu novina stiglo više od 2000



Sl. 1. *The Saturday Evening Post*, listopad 1926.

¹ Ben Ames Williams (1889. – 1953.), američki pisac, objavio više od 300 kratkih priča.

² S. G. Krantz, *Techniques of Problem Solving*, str. 167., AMS 1999.

³ Gerald E. Gannon, M. Martelli, *Discrete Dynamical Systems Meet the Classic Monkey-and-the-Bananas Problem*, Mathematics Teacher, vol. 94, no. 4, pp. 299–301, April 2001.



Sl. 2. Ben Ames Williams

pisama s rješenjima ili "rješenjima", ili pak zahtjevima da se rješenje što prije objavi. Neki nestrpljivi dermatolog iz Los Angelesa pisao je: *Nakon što sam pročitao Williamsov problem s kokosovim orasima proveo sam besane noći bezuspješno ga rješavajući.* Martin Gardner kaže da su Williamsu pisma s raznim upitima, komentarima i rješenjima stizala još i sljedećih dvadesetak godina.

Evo kako priča izgleda u svojem izvornom obliku:

Five men and a monkey were shipwrecked on a desert island, and they spent the first day gathering coconuts for food. Piled them all up together and then went to sleep for the night.

But when they were all asleep one man woke up, and he thought there might be a row about dividing the coconuts in the morning, so he decided to take his share. So he divided the coconuts into five piles. He had one coconut left over, and he gave that to the monkey, and he hid his pile and put the rest all back together.

By and by the next man woke up and did the same thing. And he had one left over, and he gave it to the monkey. And all five of the men did the same thing, one after the other; each one taking a fifth of the coconuts in the pile when he woke up, and each one having one left over for the monkey. And in the morning they divided what coconuts were left, and they came out in five equal shares. Of course

each one must have known there were coconuts missing; but each one was guilty as the others, so they didn't say anything. How many coconuts were there in the beginning?

Ista zagonetka u slobodnom prijevodu na hrvatski jezik glasi:

Majmun i pet mornara nakon brodoloma nađu se na pustom otoku i prvi dan provedu prikupljajući kokosove orahe kako bi se prehranili. Slože ih sve na jednu hrpu i pođu spavati.

No nakon što su zaspali, jedan se mornar probudio i pomislio kako bi sljedećeg jutra moglo biti nesuglasica oko raspodjele oraha pa odluči uzeti svoj dio. Podijeli orahe u pet jednakih hrpa. Jedan mu orah preostane pa ga daje majmunu, sakrije svoje a ostatak vrati na staro mjesto.

Nakon nekog vremena probudi se drugi mornar i učini istu stvar. I njemu ostane jedan orah pa ga daje majmunu. I ostali od petero mornara jedan za drugim učinili su isto; svaki je, kad se probudio, uzeo petinu oraha s hrpe i svaki je orah viška dao majmunu. A ujutro mornari podijele preostale orahe i ispadne pet jednakih dijelova. Naravno, svaki je morao znati da je nedostajalo oraha; no svaki je bio kriv pa je šutio.

Koliko je oraha bilo na početku?

U većini kasnijih pojavljivanja ove zagonetke sam njezin kraj mrvicu je otežan te je *...and they came out in five equal shares...* (...podijele na pet jednakih dijelova...) zamijenjeno s *...and they came out in five equal shares, again with one left over for the monkey...* (...podijele na pet jednakih dijelova i opet jedan preostane za majmuna...). U nastavku ovog članka problem će biti razmatran u ovoj drugoj svojoj inačici.

* * *

Podatke iz zagonetke zapišimo u obliku sustava linearnih jednadžbi u kojem su nepoznanice n , a , b , c , d , e i f prirodni brojevi.

Neka je prikupljeno n oraha. Prvi je mornar jedan orah dao majmunu, nakon čega je za sebe zadržao a oraha, petinu od preostalih $n - 1$. Dakle:

$$n = 5a + 1.$$

Nakon što je prvi mornar zadržao petinu, drugi je mornar na hrpi zatekao $4a$ oraha, jedan je orah dao majmunu, ostatak podijelio na pet jednakih dijelova i za sebe uzeo b oraha. Možemo zapisati:

$$4a = 5b + 1.$$

Jednako su postupila i ostala tri mornara, treći je uzeo c oraha, četvrti d , peti e , a svaki je pri posljednjoj raspodjeli dobio još f oraha. Tako imamo dodatne četiri jednačbe:

$$4b = 5c + 1,$$

$$4c = 5d + 1,$$

$$4d = 5e + 1,$$

$$4e = 5f + 1.$$

Razrješenje ovoga sustava dovodi do linearne jednačbe s dvjema nepoznicama:

$$1\,024n - 15\,625f = 11\,529. \quad (*)$$

Takva jednačba u kojoj su svi koeficijenti i rješenja cijeli brojevi zove se **diofantska jednačba**, u ovom slučaju to je **linearna diofantska jednačba** s dvjema nepoznicama. Uz njezino rješavanje vezane su neke činjenice koje valja poznavati pa ih navedimo.

Linearna diofantska jednačba $\alpha x + \beta y = \gamma$, gdje su α , β i γ cijeli brojevi te $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, ima rješenja ako i samo ako $M(\alpha, \beta) \mid \gamma$. Drugim riječima, bez umanjivanja općenitosti, zahtijeva se da koeficijenti α i β budu relativno prosti.

Ako je $M(\alpha, \beta) = 1$, ako dakle α i β osim broja 1 nemaju drugih djelitelja, jednačba ima beskonačno mnogo rješenja i ona su oblika:

$$x = x_0 + \beta t, \quad y = y_0 - \alpha t,$$

gdje je (x_0, y_0) jedno, bilo koje, tzv. *partikularno rješenje* zadane jednačbe, a t je (bilo koji) cijeli broj.

Kako je u našem primjeru $M(15\,625, 1\,024) = 1$, jednačba ima rješenja.

Zapišimo je najprije u obliku:

$$n = 15f + 11 + \frac{265f + 265}{1024}.$$

Kako je n cijeli broj, onda je $265f + 265 = 1024p$, $p \in \mathbb{Z}$. Iz ove pak jednačbe slijedi:

$$f = \frac{1024p}{265} - 1.$$

Dakle je $p = 265q$, $q \in \mathbb{Z}$.

I sada najprije imamo $f = 1024q - 1$ i konačno $n = 15\,625q - 4$, $q \in \mathbb{Z}$. Najmanje se rješenje dobije za $q = 1$, ono je $n = 15\,621$.

Postoje i druga rješenja jednačbe (*), što ovom problemu daje dodatnu draž. Sljedeće je rješenje osobito jednostavno.

Zapišimo sustav u obliku:

$$n = 5a + 1$$

$$4(a + 1) = 5(b + 1)$$

$$4(b + 1) = 5(c + 1)$$

$$4(c + 1) = 5(d + 1)$$

$$4(d + 1) = 5(e + 1)$$

$$4(e + 1) = 5(f + 1).$$

I sada nizom uvrštavanja redom dobivamo:

$$\begin{aligned} a + 1 &= \frac{5}{4}(b + 1) = \left(\frac{5}{4}\right)^2(c + 1) \\ &= \left(\frac{5}{4}\right)^3(d + 1) = \left(\frac{5}{4}\right)^4(e + 1) \\ &= \left(\frac{5}{4}\right)^5(f + 1). \end{aligned}$$

Kako su sve nepoznanice cijeli brojevi, iz posljednje jednakosti slijedi da je $f + 1 = 4^5k$ te $a + 1 = 5^5k$, gdje je k cijeli broj. No kako je $n = 5a + 1 = 5(a + 1) - 4$, slijedi $n = 5^6k - 4$. Najmanju vrijednost za n dobijemo uvrštavanjem $k = 1$ te se tada dobije $n = 15\,621$.

Ovo rješenje pogodno je i za poopćenje problema, kada je u igri bilo koliko (m) mornara. Tada je opće rješenje $n = m^{m+1} \cdot k - (m - 1)$ pa je najmanja vrijednost $n = m^{m+1} - (m - 1)$.

Zanimljivo je rješenje dao D. W. Sharpe koji je problem riješio primjenom jednostavnih svojstava kongruencija a rješenje uz pomoć kongruencija navedeno je i u [3].

* * *

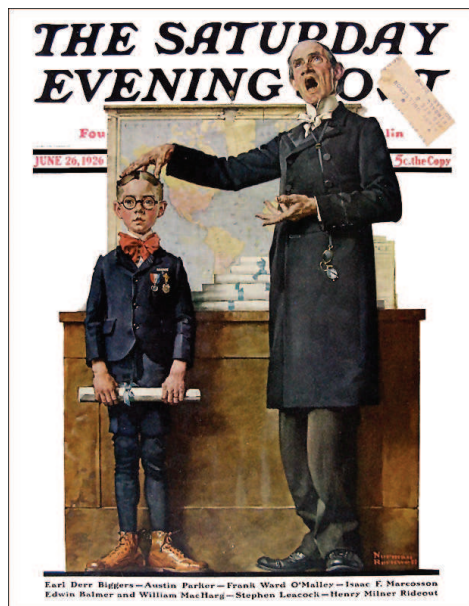
I na kraju, nećemo propustiti navesti i rješenje koje se u literaturi vrlo često navodi i zbog svoje je lucidnosti možda među matematičarima i najpopularnije. Pripisuje se A. M. Diracu (1902. – 1984.), poznatom fizičaru iz Cambridgea. Na upit Martina Gardnera, Dirac je odgovorio kako rješenje zapravo i ne pripada njemu već Johnu H. C. Whiteheadu, profesoru matematike i nećaku slavnog filozofa. Ovaj je pak izjavio da ga je negdje *pokupio*, ne sjeća se gdje.

A evo kako ono izgleda:

Budući da je šest puta provedeno dijeljenje u pet hrpa, onda će svako pribrajanje ili oduzimanje nekog višekratnika broja $5 \times 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15\,625$ dati novo cjelobrojno rješenje jednadžbe $1024n = 15\,625f + 11\,529$. Tu su uključena onda i negativna rješenja. Nakon nekoliko pokušaja uočava se da je $n = -4, f = -1$ jedno rješenje jednadžbe, a ako dodamo 15 625, dobit ćemo njezino najmanje pozitivno rješenje $n = 15\,621$.

LITERATURA

- 1/ Clifton Fadiman, *The Mathematical Magpie*, Copernicus 1997.
- 2/ Martin Gardner, *Origami, Eleusis and the Soma Cube*, MAA, Cambridge University Press, 2008.
- 3/ Miodrag S. Petković, *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, American Mathematical Society, 2009.



Sl. 3. Dvije zanimljive naslovnice časopisa *The Saturday Evening Post*