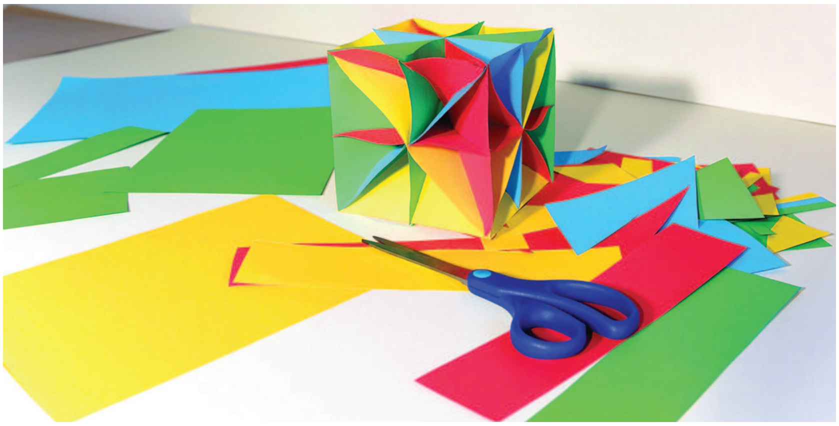
Matematika na A4



Sandra Gračan, Zagreb

Znate li koja je razlika između matematičara i filozofa?
Matematičar za svoj rad treba papir, olovku i koš za smeće, a filozof može i bez koša.

Nedavno mi je "pao" u ruke članak s interneta[1] koji je napisao Hans Walser, švicarski matematičar s Matematičkog Instituta u Baselu. Walser je pokazao da se i u običnom listu papira može kriti lijepa matematika. Dakle, može li matematičar ne samo bez koša, nego i bez olovke? Može, može. . . .

Uzmete li u ruke prazan list papira, najvjerojatnije ste uzeli list A4 formata, dimenzija 210 mm x 297 mm. Taj format zadan je međunarodnim standardom ISO 216 koji se danas koristi gotovo u cijelom svijetu. Zašto su za standard odabrane baš te, na prvi pogled čudne brojke, umjesto lijepih i okruglih brojeva u našem metričkom sustavu i kakvu sve matematiku skriva A4-pravokutnik, pročitajte u ovom članku.

Ideja standarda ISO 216

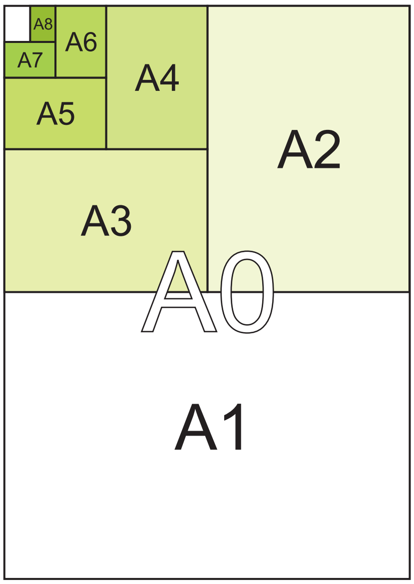
U standardu ISO 216 točno je određena dimenzija A4 papira. Tim su standardom zadani i svi ostali A formati prikazani u sljedećoj tablici.

format	dimenzije
A0	840 mm x 1188 mm
A1	594 mm x 840 mm
A2	420 mm x 594 mm
A3	297mm x 420 mm
A4	210 mm x 297 mm
A5	148 mm x 210 mm
A6	105 mm x 148.5 mm

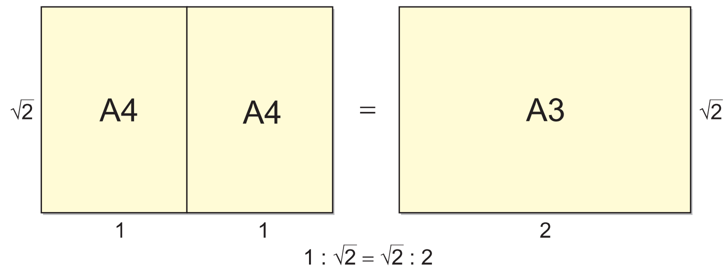
Nijedna od tih dimenzija nije baš neki zgodan broj, zar ne? Evo zašto.

Iz navedenih dimenzija najprije ćemo primijetiti kako presavijanjem ili rezanjem po širini jednog papira, primjerice A4 formata na dva jednaka dijela, dobivamo papire A5 formata. Ponovimo li postupak

[1] `www.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/M32/DIN_Rechteck.pdf`, prijevod i crteži: Ivana Elezović



Slika 1.



Slika 2.

na A5 formatu, dobit ćemo još "za jedan" manju dimenziju, tj. listove A6 formata. S druge strane, stavimo li dva A4 lista jedan do drugoga, dobivamo A3 format. Na velikim tiskarskim strojevima vrtit će se veliki listovi A2, A1 ili čak A0 formata, od kojih će se onda presavijanjem i obrezivanjem dobivati knjige manjih formata.

Usporedimo li, dakle, duljine stranica dvaju uzastopnih A-pravokutnika, dobivamo da vrijedi:

$$b_2 = a_1, \qquad a_2 = \frac{1}{2} \cdot b_1. \tag{1}$$

Sljedeću zanimljivost otkrit ćemo računamo li omjere duljina veće i manje stranice bilo kojeg od gore navedenih A-pravokutnika. Možda će vas čak i iznenaditi to što se uvijek dobije približno isti broj: $1.4142\ldots$. Prepoznajete li ga? Naravno, to je $\sqrt{2}$. Naime, A formati definirani su tako da se prelaskom s manjeg na veći format (ili obratno) omjer duljina stranica ne mijenja, odnosno da vrijedi:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2. \tag{2}$$

Sada iz (1) i (2) slijedi da za stranice a i b jednog A-pravokutnika vrijedi $b : 2a = a : b$, odakle je $(b : a)^2 = 2$, odnosno $b : a = \sqrt{2} : 1$.

Drugim riječima, širina i visina A-pravokutnika odnose se kao stranica i dijagonala kvadrata. Dodamo li toj činjenici uvjet da A0-pravokutnik ima površinu od 1 m^2, dolazimo do gore navedenih dimenzija svakog pojedinog A-pravokutnika. Kako se papir obično mjeri u g/m^2, ovaj dodatni uvjet olakšava računanje težine dokumenata ili knjiga ako je poznat format i broj stranica. A kako $\sqrt{2}$ nije racionalan pa jedna od stranica pravokutnika ne može imati duljinu izraženu lijepim okruglim brojevima, vrijednosti u gornjoj tablici dobivene su zaokruživanjem na najbliži milimetar.

Ukratko, standardom ISO 216 definiraju se A formati papira, i to na temelju sljedećih jednostavnih pravila:

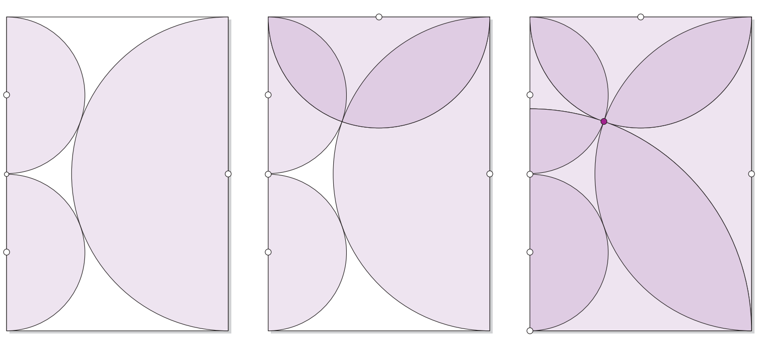
- visina podijeljena sa širinom stranice bilo kojeg A formata uvijek je drugi korijen iz dva (1.4142);
- format A0 ima površinu od jednog kvadratnog metra;
- format A1 je A0 prerezan na dva jednaka dijela. Drugim riječima, visina A1 stranice jednaka je širini stranice A0 formata, a širina A1 stranice jednaka je polovini visine od A0;
- svi manji formati iz A serije definiraju se na isti način. Prerežete li A$_n$ usporedno s kraćom stranicom na dva jednaka dijela, dijelovi će biti A$_{n+1}$ formata;
- standardizirane visine i širine papira zaokruženi su cijeli brojevi u milimetrima.

Prednost ovako definiranih formata papira otkrio je još davne 1786. godine njemački znanstvenik Georg Christoph Lichtenberg, ali je tek dr. Walter Porstmann početkom 20. stoljeća pretvorio Lichtenbergovu ideju u sustav koji je u Njemačkoj uveden kao standard DIN 476 (DIN – Deutsches Institut für Normung) od 1922. godine. Do 1975. prihvatilo ga je već toliko zemalja da je 1977. standard DIN 476 proglašen standardom ISO 216 (ISO – International Standard Organization) koji danas poštuje većina zemalja (primjerice, Sjedinjene Američke Države i Kanada imaju drukčiji standard). Tim standardom definirane su točne duljine stranica ne samo za A formate, nego i za B i C formate papira, za koje također vrijede zanimljiva matematička pravila[2].

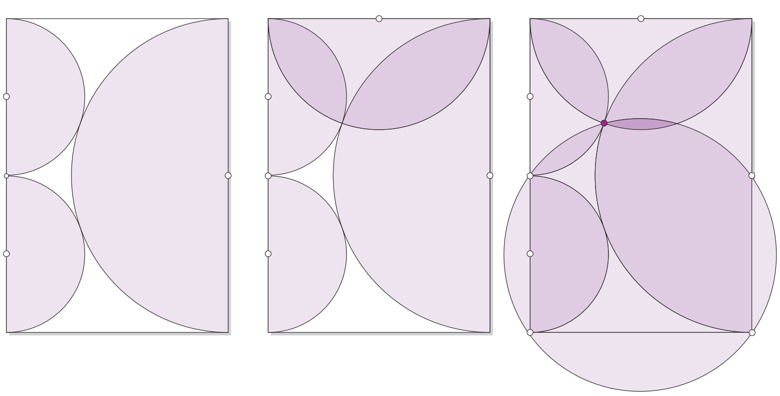
No, vratimo se sada našem A4 papiru. Slijedi prava mala slikovnica, pogledajte.

Lukovi nad stranicama A4-pravokutnika

Za početak pogledajmo donje sličice.



Slika 3. Polukružnice i četvrtina kružnice

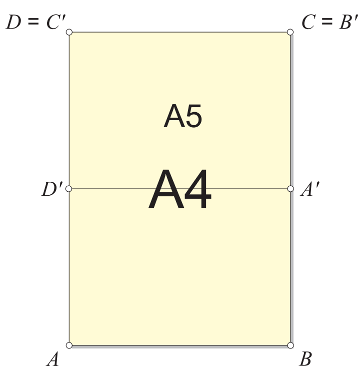


Slika 4. Polukružnice i kružnica

Zanimljivo je kako se međusobno dodiruju i sijeku svi nacrtani lukovi na slikama 3. i 4. Uočite točku kojom prolaze čak četiri od pet lukova, te da kružnica na slici 4. prolazi još i dvama vrhovima i polovištima duljih stranica A4-pravokutnika. Baš zgodno.

Preslikavanje ravnine

Podijelimo li A4-pravokutnik na dva jednaka dijela dužinom koja spaja polovišta duljih stranica, dobili smo dva A5-pravokutnika okrenuta vodoravno. Jasno je da su pravokutnici A5 i A4 formata slični. Kako bismo definirali preslikavanje ravnine kojim A4-pravokutnik prelazi u gornji A5-pravokutnik? Nije teško zaključiti da će to biti kompozicija dvaju preslikavanja ravnine: *homotetije* sa središtem u nekoj točki S uz koeficijent $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i *rotacije* oko te točke za $90°$ (A4-pravokutnik mora se najprije smanjiti pa okrenuti u vodoravan položaj).

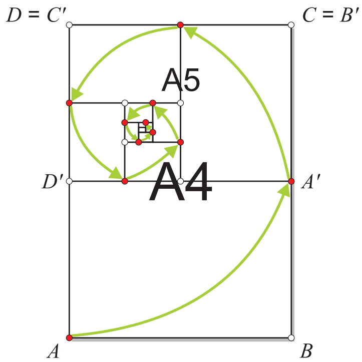


Slika 5.

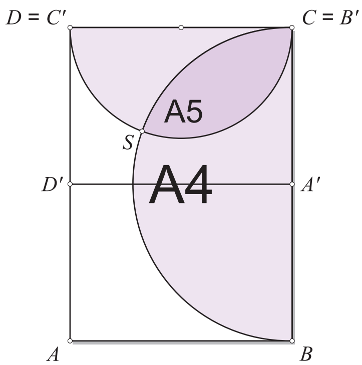
Središte S, tj. fiksna točka preslikavanja, točka je koja se mora nalaziti i u A4 i u A5-pravokutniku. Postavlja se pitanje kako je odrediti. Slijedi nekoliko ideja.

Prvi način – prikazan je na slici 6. i daje približno rješenje. Naime, uzastopnim preslikavanjem pravokutnika na sve manje i manje pravokutnike pratimo sve slike vrha A početnog A4-pravokutnika. Čini se kao da vrh "putuje" po spirali, polako se približavajući traženoj točki S.

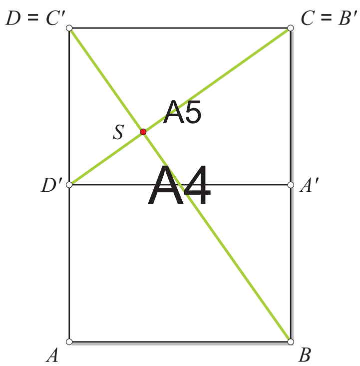
[2] Format većine knjiga je B5 (176 mm x 250 mm), a duljina jedne stranice B0 formata je 1000 mm – pokušajte sami pronaći pravila!



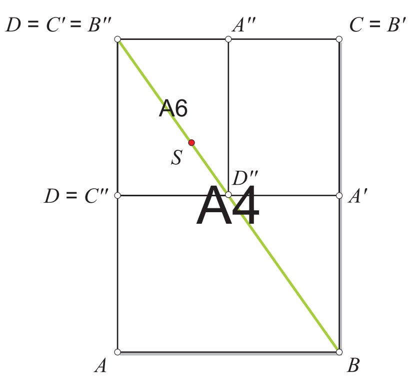
Slika 6.



Slika 7.



Slika 8.



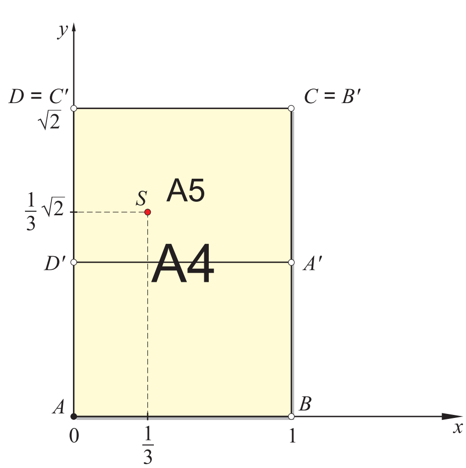
Slika 9.

Drugi način – točka S je presjek Talesovih polukružnica nad stranicama $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ kao na slici 7. (već je zapravo spomenuta na slikama 3. i 4.). Elegantno.

Treći način – točka S presjek je dijagonale A4-pravokutnika s dijagonalom A5-pravokutnika. Kratko i jasno.

Četvrti način – izvedemo li ranije definirano preslikavanje dva puta za redom, preslikali smo A4-pravokutnik $ABCD$ na A6-pravokutnik $A''B''C''D''$. To preslikavanje možemo opisati kao kompoziciju homotetije sa središtem S i koeficijentom $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ i rotacije za kut π. Zaključujemo da točka S leži na dijagonali $\overline{BD} = \overline{BB''}$ i dijeli je u omjeru $1 : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} : \frac{1}{3}$. Eh, tu se već komplicira.

Peti način – poigrajmo se s kompleksnim brojevima. A4-pravokutnik smjestimo u kompleksnu ravninu kao na slici 10. Pri zadanom preslikavanju svaka se točka z kompleksne ravnine preslikava u neku točku $w = az+b$. Koeficijente a i b lako ćemo izračunati. Kako je točki $A(0,0)$, odnosno kompleksnom broju 0 preslikavanjem pridružena točka $A'\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, a točki $B(1,0)$ točka $B'(1, \sqrt{2})$, vrijedi da je $1 + i\frac{\sqrt{2}}{2} = b$ i $1 + i\sqrt{2} = a + b$, odnosno



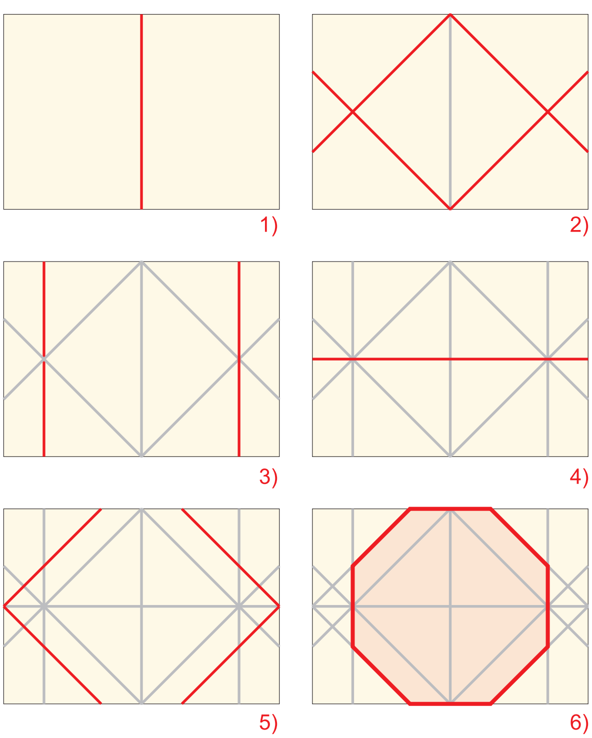
Slika 10.

$i\frac{\sqrt{2}}{2} = a$. Dakle, $w = i\frac{\sqrt{2}}{2}z + 1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, a iz uvjeta $z = i\frac{\sqrt{2}}{2}z + 1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ možemo lako odrediti fiksnu točku $z = \frac{1}{3} + i\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Paaa, može i tako. Pada li vam na pamet još neka ideja?

Pravilni osmerokut u A4-pravokutniku

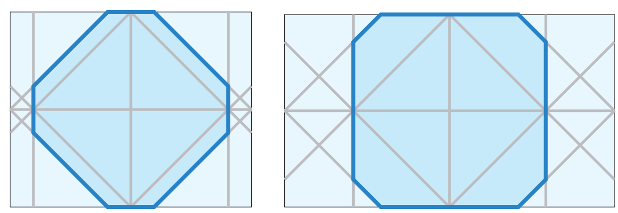
A4 format papira ima jedno zanimljivo svojstvo, a to je da se presavijanjem papira određenim redom može dobiti pravilan osmerokut. Na sljedećem nizu sličica pogledajte kako (i isprobajte).

1) Papir postavimo u vodoravan položaj, presavijemo ga napola po okomitoj srednjici i vratimo u početni položaj;
2) sva četiri ugla papira presavijemo tako da vrhovi pravokutnika padnu na označenu srednjicu, zatim opet razmotamo papir;
3) lijevi i desni rub papira presavijemo paralelno sa stranicom kako je naznačeno sljedećom slikom;
4) presavijemo papir napola po vodoravnoj srednjici i razmotamo ga;
5) sada sva četiri ugla papira presavijemo tako da vrhovi padnu na vodoravnu srednjicu i razmotamo;
6) na A4-papiru uočavaju se stranice pravilnog osmerokuta.

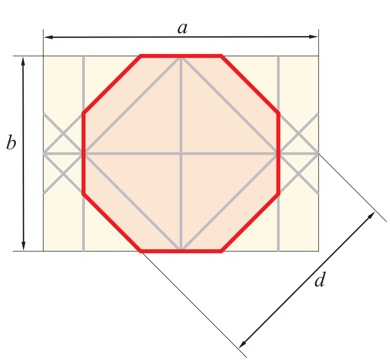


Slika 11.

Presavijanjem pravokutnika koji nije sličan A4-pravokutniku istim postupkom dobili bismo osmerokut u kojemu bi svi kutovi bili jednaki, ali duljine stranica ipak ne bi, kao na slici 12.


Slika 12.

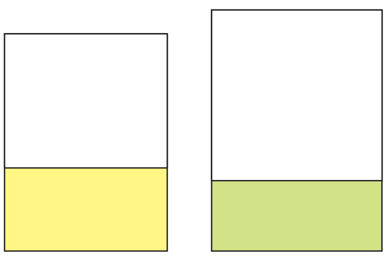
Tajna leži u broju $\sqrt{2}$, odnosno u posebnom odnosu duljina stranica toga pravokutnika. Da bi osmerokut bio jednakostraničan, udaljenost četiriju parova međusobno nasuprotnih stranica osmerokuta morala bi biti jednaka. Na slici 13. vidimo da je $d = \frac{a}{\sqrt{2}}$ pa iz uvjeta da je $d = b$ slijedi da mora biti $a = b\sqrt{2}$, što pravokutnik A4 formata i njemu slični pravokutnici zadovoljavaju prema svojoj definiciji.



Slika 13.

Ostatak od ostatka od ostatka

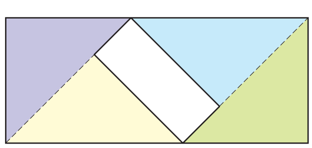
Pogledajte sljedeću zanimljivost. Prisjetimo se na trenutak zlatnog pravokutnika – odrežemo li mu kvadrat, ostat će nam manji pravokutnik sličan početnom, dakle manji zlatni pravokutnik. Takvo svojstvo pravokutnik A4 formata nema – odrežemo li kvadrat A4-pravokutniku, preostat će nam pravokutnik čije su duljine stranica u omjeru $(\sqrt{2}+1) : 1$.



Slika 14. Zlatni pravokutnik i A-pravokutnik

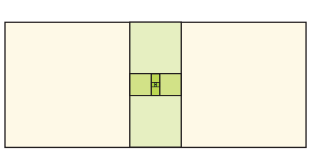
Svojstvo omjera duljina stranica početnog A4-pravokutnika nije ostalo sačuvano. No, taj preostali pravokutnik ipak ima dva zanimljiva svojstva:

1) odrežemo li mu 4 međusobno sukladna pravokutna jednakokračna trokuta kao na slici 15., preostat će manji pravokutnik sličan početnom – omjer duljina stranica $\sqrt{2}+1 : 1$ sada ostaje sačuvan;



Slika 15.

2) odrežemo li tom pravokutniku slijeva i zdesna kvadrate, ostat će nam pravokutnik također sličan polaznom.

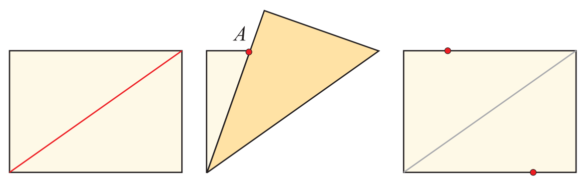


Slika 16.

Racionalno u iracionalnome

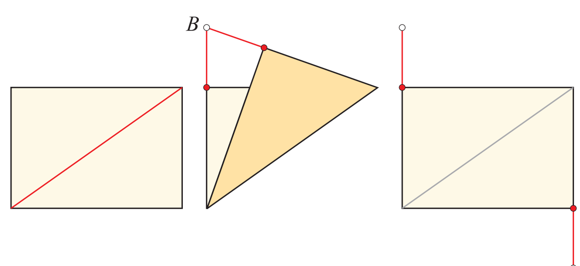
Sljedeća u ovom nizu zanimljivosti jest ta da usprkos tomu što je omjer duljina stranica A4-pravokutnika jednak $\sqrt{2}$, dakle iracionalan broj, međusobne odnose nekih njegovih elemenata opisuju lijepi racionalni brojevi.

Tako će primjerice presavijanjem po dijagonali jedna dulja stranica presjeći drugu dulju stranicu u točki A i podijelit će je u omjeru $1 : 3$, kao na slici 17.



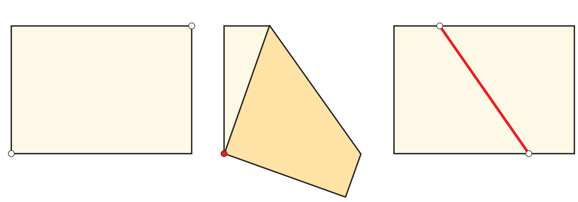
Slika 17.

Slično svojstvo vrijedit će i za kraće stranice, produljimo li ih nakon presavijanja do točke B (točke u kojoj se sijeku pravci na kojima leže kraće stranice – nalazi se izvan pravokutnika, vidi sliku 18.). Sada vrhovi pravokutnika dijele produljene stranice u omjeru $1 : 3$.



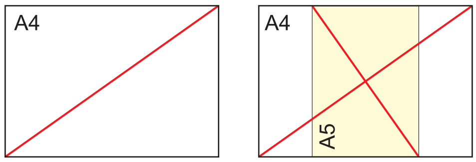
Slika 18.

Nadalje, presavijemo li A4-pravokutnik tako da se poklope dva nasuprotna vrha (slika 19.), a zatim ga raširimo, označili smo dužinu čije rubne točke dijele svaku od duljih stranica opet u omjeru $1 : 3$.



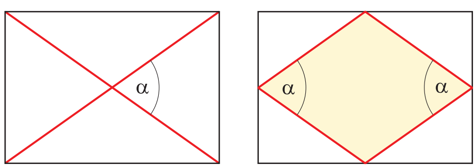
Slika 19.

Sada pogledajmo sliku 20. – ova racionalnost ne treba riječi.



Slika 20.

Promatramo li pak šiljasti kut α koji zatvaraju dijagonale A4-pravokutnika, vidimo da je on jednak šiljastom kutu romba upisanog u pravokutnik kojemu vrhovi leže u polovištima stranica pravokutnika. Dijagonale tog romba odnose se kao i stranice pravokutnika, $\sqrt{2} : 1$.



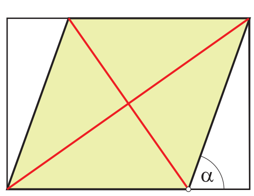
Slika 21.

Izračunajmo kut α:

$$\alpha = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 70.53^\circ.$$

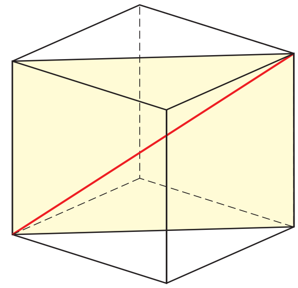
Grozan kut! No, i za njega vrijedi lijepa racionalnost: $\cos\alpha = 1 : 3$.

I za romb maksimalne površine koji je upisan u A4-pravokutnik i kojemu je omjer duljina dijagonala $\sqrt{2} : 1$ vrijedi da mu je šiljasti kut jednak α, kao što prikazuje sljedeća slika.



Slika 22.

Skočimo zatim u višu dimenziju. Iz međusobnog odnosa duljina stranica A4-pravokutnika proizlazi da iste proporcije imaju svi dijagonalni presjeci neke kocke.

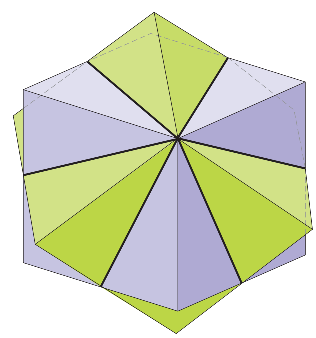


Slika 23.

Pronađimo i ovdje racionalnost. U prostoru će "presavijanju" po dijagonali odgovarati rotacija kocke oko osi koja sadrži prostornu dijagonalu za 180°. Postavimo li kocku u pravokutni koordinatni sustav u prostoru, tada ovo preslikavanje u prostoru opisuje sljedeća matrica:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Primijetimo da su svi elementi matrice racionalni brojevi. Nacrtamo li obje kocke, original i rezultat rotacije će biti u međusobnom položaju kao što prikazuje slika 24.

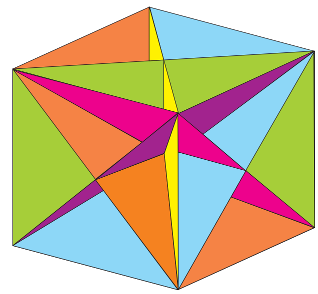


Slika 24.

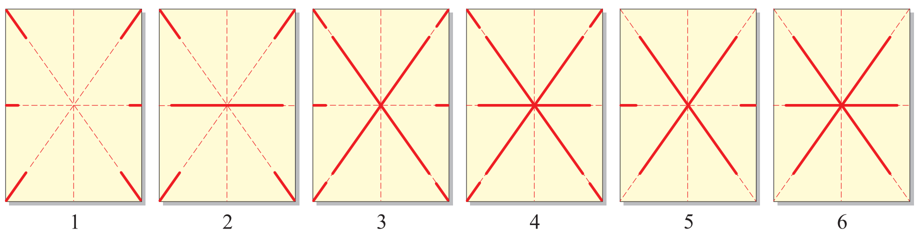
Šareni modeli kocke

Na kraju, zabavite se i izradite nekoliko zanimljivih modela. Uz papire A4 formata, trebat će vam još olovka, ravnalo, skalpel (ili oštar nožić), nešto slobodnog vremena, spretni prsti, malo strpljenja, dobra glazba u pozadini, možda šalica kave sa strane. . .

1. Model kocke s dijagonalnim presjecima

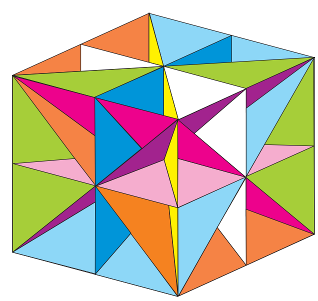


Uzmite 6 listova papira A5 formata (ili A4 ili sličnog). Ucrtajte na njima crte prikazane na sljedećim slikama, zatim skalpelom načinite proreze i sklapajte dijelove redom prema brojevima navedenim ispod svakog dijela. Obratite pozornost na duljinu proreza! Prorezi se razlikuju po duljini. Oni su, primjerice, kod 1. i 2. dijela dvostruko dulji nego na 3. i 4. dijelu. Dobit ćete model kocke na kojem se vide svi njezini dijagonalni presjeci, kao na slici desno.

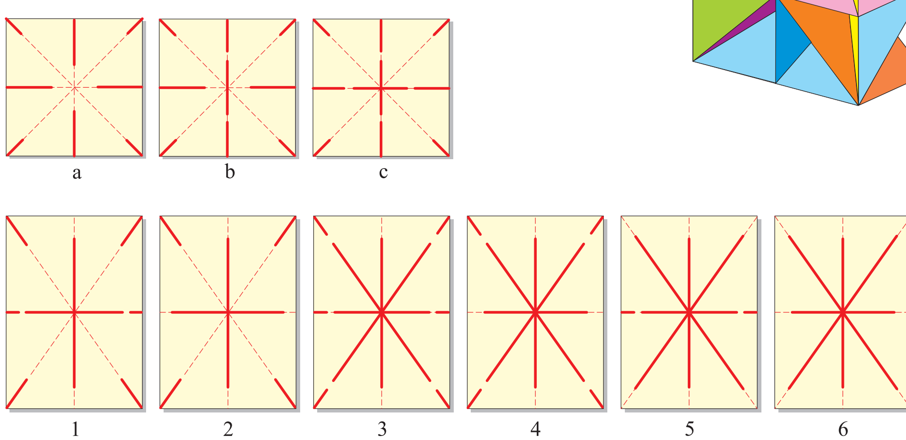


Slika 25.

2. Model kocke s dijagonalnim i presjecima ravninama simetrije



Kocka je zrcalno simetričan skup točaka u prostoru i ima devet različitih ravnina simetrije. Presjeci kocke i triju od tih devet ravnina jesu kvadrati. Model kocke sa svim presjecima još je atraktivniji, a možete ga izraditi prema predlošcima na sljedećim slikama. Kako on izgleda ako se načini od šarenih papira, pokazuje fotografija uz naslov ovog članka.



Slika 26.

Napomena: Poželite li neke od ovih modela izraditi u razredu s učenicima, pokušajte barem jedan sastaviti sami. Nije sasvim jednostavno. . . .

Eto, ipak nam je trebalo mnogo više od samih papira, uključujući i koš za smeće. No, nadam se da vam se svidjelo.

A u Panoptikumu ovoga broja MiŠ-a možete pogledati zanimljive spirale složene od n pravokutnika A_n formata. Spirale je složio Hans Walser, nizanjem pravokutnika po veličini i rotacijom za kutove od 45, 90, 135, 180, 225, 270 ili 360 stupnjeva. Eh, ti matematičari. . .