

# Od rimskih brojeva do *chisanbopa*

Ljerka Jukić<sup>1</sup>, Ivana Hartmann<sup>2</sup>, Osijek

Brojeve možemo zapisati riječima i simbolima. Svi se slažemo da je jednostavnije i praktičnije zapisati simbolima 21 nego riječima *dvadeset i jedan*.



Simbole 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 koje koristimo u zapisu brojeva često nazivamo arapskim brojevima. Taj naziv nije u potpunosti točan jer su se simboli u isto vrijeme pojavili u indijskim i arapskim zemljama u 9. stoljeću, stoga ih je prikladnije zvati indijsko-arapskim brojevima. Oni su se tek u 13. stoljeću pojavili u Europi, kad ih je sa svojih putovanja donio talijanski matematičar Leonardo iz Pise, poznatiji kao Fibonnaci. Prije pojave indijsko-arapskih brojeva, stare su civilizacije imale svoje simbole s pomoću kojih su prikazivali brojeve. Stari Egipćani i Babilonci izmislili su vlastite sustave u kojima su, osim zapisa brojeva, mogli izvoditi različite aritmetičke operacije [1]. Međutim, njihovi sustavi nisu bili praktični pa se nisu proširili među drugim narodima. U Europi su dugo vremena u uporabi bili rimski brojevi, a njihova je široka uporaba prestala kad su ljudi spoznali kako je lako zapisi-

vati brojeve i računati s pomoću indijsko-arapskih brojeva. Rimski brojevi nisu u potpunosti izumrli, kao što je to bio slučaj s većinom starih brojevnih sustava. Povremeno se mogu vidjeti kao brojke na satu, u datumima na službenim dokumentima, kod obilježavanja katova u zgradama i označavanja poglavlja u knjigama.

Brojevni sustav, koji smo počeli učiti u najranijoj dobi recitirajući redom brojeve, razvijao se stotinama godina. Također je trebalo i nekoliko stotina godina da bude prihvaćen u svakodnevnoj uporabi. Današnji indijsko-arapski brojevni sustav, poznatiji kao dekadski brojevni sustav, koristi se diljem svijeta. Iako se u raznim jezicima imena brojeva razlikuju, njihov zapis je isti. Ono što mi zovemo dva, Englezi two, Nijemci zwei, Francuzi deux, Danci to, Mađari két, svi zapisujemo na isti način, kao 2.

<sup>1</sup> e-mail: [ljukic@mathos.hr](mailto:ljukic@mathos.hr), Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.

<sup>2</sup> e-mail: [ihartman@mathos.hr](mailto:ihartman@mathos.hr)

## 1. Rimski brojevni sustav

Rimski brojevi, baš kao i indijsko-arapski, koriste bazu 10. Osnovni simboli za 1, 10, 100 i 1000 redom su I, X, C i M. Oni su prošireni s još nekoliko brojeva V, L i D za 5, 50 i 500. Kod prikazivanja brojeva u rimskom sustavu moramo paziti na dva pravila: ako se simbol za manji broj pojavljuje lijevo od simbola za veći broj, tada oduzimamo; u suprotnom, ako je simbol za manji broj desno od simbola za veći broj, tada zbrajamo. Pogledajmo kako bismo zapisali brojeve 4, 9, 12 i 60 korištenjem ovih pravila:

$$4 = \text{IV}, \quad 9 = \text{IX}, \quad 12 = \text{XII}, \quad 60 = \text{LX}.$$

Broj veći od sto, primjerice 123, zapisali bismo kao CXXIII. Rimski sustav nije pozicijski sustav, tj. nije određeno mjesto jedinica desetica, stotica pa broj moramo pročitati u cijelosti da bismo znali o kojem je broju riječ. Broj zapisan u rimskim simbolima MCCXXXIV, u našem sustavu glasi 1234. Kad se ne bismo pridržavali pravila za oduzimanje, broj 1234 imao bi zapis MCCXXXIII.

## 2. Rimski abakus

Za učenika trećeg razreda osnovnih škola diljem svijeta zadatak u kojem zbrajamo višeznamenaste brojeve bio bi relativno jednostavan:

$$\begin{array}{r} 1972 \\ + 1234 \\ \hline \end{array}$$

Za učenika trećeg razreda neke prestižne osnovne škole u Europi u 14. stoljeću, taj bi zadatak imao sasvim drukčiji izgled:

$$\begin{array}{r} \text{MCMLXXII} \\ + \text{MCCXXXIV} \\ \hline \end{array}$$

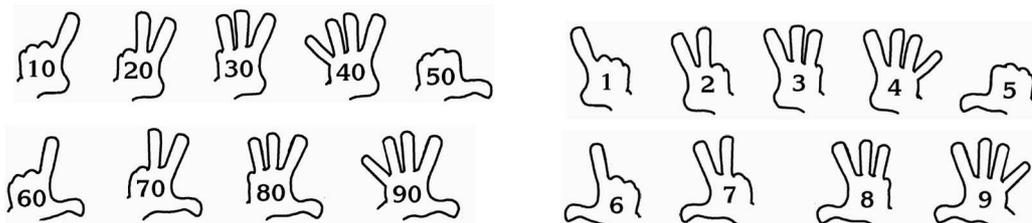
Iako bi većina današnjih učenika rado posegnula za kalkulatorom kako bi riješila gornji zadatak, na raspolaganju im je i algoritam za zbrajanje. U 14. stoljeću učenici, u školama koje su koristile rimski brojevni sustav, nisu imali nikakav algoritam za zbrajanje kojime bi našli zbroj gornjih brojeva. Jedino na što su se mogli osloniti bila je "ploča za

računanje". Takva naprava za računanje zvala se abakus, a sastojala se od vertikalnih stupaca po kojima su se mogla pomicati zrnca. Rimski abakus razlikuje se u svojoj izvedbi od najpoznatijih abakusa, ruskog [3] i kineskog [4]. Vertikalni stupci bili su žljebovi u koje su se stavljala zrnca. U kineskom abakusu stupci su bili izrađeni od čvrstog materijala po kojemu se zrnca mogla kliziti gore-dolje, a kod ruskog stupci nisu bili postavljeni vertikalno, nego horizontalno. Rimski abakus imao je žljebove označene zdesna nalijevo s I, X, C i M, a između su se nalazila mala udubljenja u koje je moglo stati jedno zrnce. Ta udubljenja bila su rezervirana za brojeve V, L i D. Znakovi I, X, C i M ponavljaju se više puta u zapisu nekog broja, dok se V, L i D mogu pojaviti samo jednom, što objašnjava izgled rimskog abakusa. Kod računanja na rimskom abakusu brojevi u rimskom zapisu nisu mogli poštovati pravilo za oduzimanje. Ako bi se u računu pojavio IX, on bi na abakusu bio zapisan kao VIII.

## 3. Chisanbop

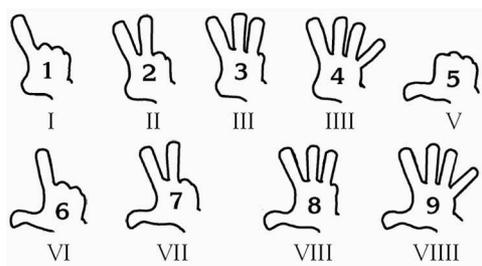
Iako rimski brojevni sustav nije pozicijski sustav, koristi bazu 10 baš kao i naš indijsko-arapski sustav. S druge strane rimski sustav grupira brojeve oko petice, što je vidljivo u konstrukciji brojeva, npr. 6 = VI, 14 = XIV, 27 = XXVII. Uporaba broja 10 za bazu obaju sustava često se obrazlaže ljudskom anatomijom. Svaki čovjek ima 10 prstiju na rukama, a u ranim počecima aritmetike, ljudi su brojili i računali na prste. Čak i danas, uza svu naprednu tehnologiju koju posjedujemo, prste koristimo kod nabiranja manjih količina pa čak i za manje aritmetičke operacije. Kako čovjek ima dvije ruke a na svakoj 5 prstiju, grupiranje rimskih brojeva oko petice izgleda prirodno. Postoji tehnika brojenja koja na sličan način grupira brojeve oko petice, a zove se *chisanbop* ili *chisenbop*. Riječ *chisanbop* dolazi od korejskog *chi* što znači prst, i *sanpop* što znači računati. *Chisanbop* je korejska tehnika prikazivanja brojeva do 100 s pomoću prstiju obje ruke, a pojavila se sredinom 20. stoljeća [5]. Ta tehnika omogućuje i više od pukog brojenja.

S pomoću nje možemo izvoditi i osnovne aritmetičke operacije jednoznamenkastih i dvoznamenkastih brojeva. Na desnoj ruci prikazujemo jedinice, a na lijevoj desetice:



Slika 1.

Zapišimo rimske brojeve za odgovarajuće pozicije prstiju na desnoj ruci. U ovom slučaju nećemo poštovati pravilo oduzimanja.



Slika 2.

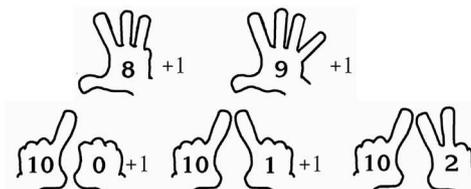
Uočimo kako je prikaz brojeva tehnikom *chisanbop* vrlo sličan zapisu broja u rimskom brojevnom sustavu (slika 2.). Kada bismo to napravili i za odgovarajuće pozicije prstiju na lijevoj ruci, rezultat bi bio vrlo sličan. Prisjetimo se i rimskog abakusa. Zapis brojeva na njemu gotovo je jednak prikazu nekog broja u tehnici *chisanbop*. Iako nismo naučili računati na rimskom abakusu, pogledajmo kako se računa tehnikom *chisanbop*. Na gotovo jednak način zbrajali bismo, oduzimali ili množili na rimskom abakusu.

### 3.1. Zbrajanje

Ako želimo zbrojiti dva jednoznamenkasta broja, zbrajamo ih na desnoj ruci tako da prvo pokažemo prvi pribrojnik, a zatim nadodajemo drugi pribrojnik brojenjem.

**Primjer 1.** Zbrojimo  $8 + 4$ .

Postavimo desnu ruku da pokazuje broj 8. Zatim dodajemo jedan po jedan prst. Kažemo 1 i pokazujemo 9. Kad kažemo 2, prelazimo na lijevu ruku kojom pokazujemo desetice. Ispružimo kažiprst lijeve ruke koji označava 10, a prste desne ruke skupimo u šaku. Sljedeći broj dodajemo ponovno na desnoj ruci koja označava jedinice. Znači, kažemo 3 i pokazujemo 11. Naposljetku kažemo 4 i pokazujemo 12.

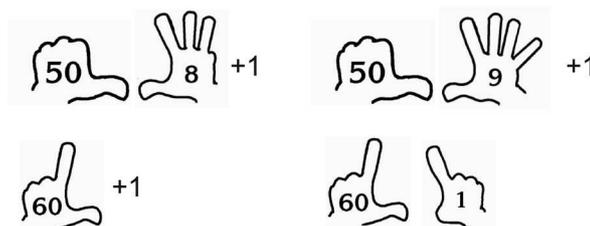


Slika 3.

Pogledajmo sada kako se zbrajaju dvoznamenkasti brojevi.

**Primjer 2.** Zbrojimo  $58 + 23$ .

Prvo postavimo prste lijeve i desne ruke da pokazuju broj 58, a zatim pribrajamo broj 3. Ruke nam pokazuju broj 61.



Slika 4.

## povijesni kutak

Moramo još dodati 20 broju 61 koji trenutačno pokazujemo. Na lijevoj, koja označava desetice, dodajemo jedan po jedan prst odbrojavajući deset, dvadeset. Sada naši prsti pokazuju rezultat zbrajanja 81.



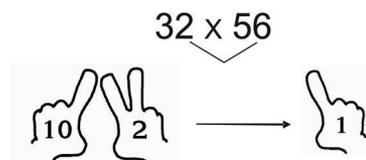
Slika 5.

### 3.2. Množenje

Za množenje s dvoznamenkastim brojevima potrebno je poznavati tablicu množenja do 100. Potrebni su nam i papir i olovka kako bismo zapisali dobivene rezultate.

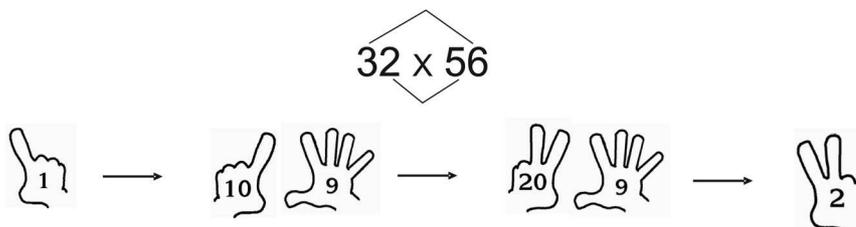
**Primjer 3.** Pomnožimo  $32 \times 56$ .

Pomožimo  $2 \times 6$ . Postavimo ruke da pokazuju 12. Na papir krajnje desno ispod zadatka zapišimo 2. Očistimo desnu ruku, odnosno skupimo prste u šaku. Pomaknimo 10 s lijeve ruku u 1 na desnoj ruci. Očistimo lijevu ruku.



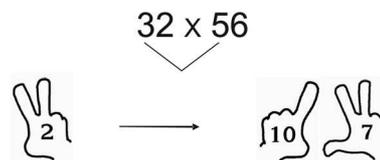
Slika 6.

Pomnožimo  $3 \times 6 = 18$ . Dodajmo 18 broju 1 na desnoj ruci. Sada naša ruka pokazuje 19. Pomnožimo  $2 \times 5 = 10$ . Dodajmo 10 broju 19 na desnoj ruci. Sada nam ruke pokazuju broj 29. Zapišimo 9 na papir lijevo od već zapisanog broja 12. Očistimo desnu ruku. Broj 20 s lijeve ruke prenesemo u broj 2 na desnoj ruci. Očistimo lijevu ruku.



Slika 7.

Pomnožimo  $3 \times 5 = 15$ . Dodajmo 15 broju 2 na desnoj ruci. Sada nam ruke pokazuju broj 17. Zapišimo 17 lijevo od zapisanog 92 te očistimo ruke. Dobili smo traženi umnožak 1792.



Slika 8.

Način na koji u tehnici *chisanbop* zbrajamo i množimo brojeve u potpunosti odgovara načinu na koji se računa na rimskom abakusu. Zanimljivo je da su se narodi koji su živjeli u različitim krajevima svijeta i u različito vrijeme domislili sličnim načinima računanja. To još više ide u prilog pretpostavci da je 10 prstiju na rukama odigralo važnu ulogu u razvoju brojevnih sustava i aritmetike, iz kojih se kasnije tijekom stoljeća razvila naprednija matematika.

## 4. I na kraju. . .

Rimski brojevi imali su značajnu uporabu u povijesti. Osim kompliciranog zapisa i čitanja rimskih brojeva, glavni nedostatak rimskog brojevnog sustava jest nemogućnost određivanja pozicija. U tehnici *chisanbop* pozicije se mogu odrediti prikazom brojeva na desnoj ili lijevoj ruci. Desnom rukom prikazujemo jedinice, a lijevom desetice. Međutim, nedostatak je ove tehnike očit: ne mogu se prikazati brojevi veći od 100. S druge strane, tehnika *chisanbop* zanimljiva je i korisna. Način na koji vizualiziramo zbrajanje i množenje dvoznamenkastih brojeva učestalom vježbom jednostavno se može pretočiti u mentalnu aritmetiku, tj. zbrajanje i množenje "napamet" bez imalo muke.

Ovim smo željeli dati povijesni pregled brojnih sustava i pokazati kako bi današnja matematika bila nezamisliva bez indijsko-arapskih brojeva ([1], [2]). Također, možemo uočiti da je deset prstiju na ruci imalo važnu ulogu u osmišljavanju brojnih sustava. Način na koji su mnogi narodi prikazivali brojeve proizlazio je iz naše anatomije. Glavni razlog je bio računanje na prste, iz kojega su gradili svoje brojne sustave.

Radionica "Kako računati na prste" u kojoj je predstavljena tehnika *chisanbop* održana je u Osijeku u sklopu Festivala znanosti 2009. godine. Sudjelovalo je 60-tak učenika petog razreda osnovne škole koji su iskazali svoje oduševljenje načinom na koji jednostavno mogu zbrajati i množiti brojeve veće od 10.

### LITERATURA

- 1/ F. M. Brückler: *Povijest matematike 1*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, 2007.
- 2/ F. M. Brückler: *Povijest matematike 2*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, 2010.
- 3/ A. Ivir: *Kako se nekad računalo. Ruski abak*, Matka, br. 9, 5–7.
- 4/ I. Matić, D. Ševerdija: *Metodički aspekti abakusa I*, Matematika i Škola, br. 52.
- 5/ Hang Young Pai: *The Complete Book of Chisanbop: Original Finger Calculation Method*, Van Nostrand Reinhold Company, 1981.
- 6/ <http://www.romannumerals.co.uk/>

## Najmlađi genij za matematiku postao je i najmlađi diplomant na Cambridgeu u posljednja dva stoljeća.

**Arran Fernandez**, britanski **14-godišnjak**, već je srušio rekorde rezultata testiranja najtežeg ispita u britanskom obrazovnom sustavu, piše *Daily Mail*. Ako prođe najteži ispit iz fizike na Cambridgeu, Arran će postati najmlađi diplomant koji je studirao na slavnom sveučilištu od bivšeg britanskog premijera **Williama Pitta 1773. godine**.

"Matematika je moj omiljeni predmet od kada se sjećam", rekao je Arran. "Volim se obrazovati kod kuće jer sam tada uključen u ono što se zbiva", kaže Arran te dodaje kako njegov otac slaže raspored prema kojemu će učiti.



Do diplome, koja se na Cambridgeu zove tripos, dolazi se veoma teško, a zaradili su je, među ostalima, **Isaac Newton** i **Stephen Hawking**. Arran je na naslovnice novina dospio **2001. godine** kada je postao najmlađa osoba koja je prošla GCSE ispit sa samo **pet godina**, i to s najvećom ocjenom. Tada je rekao kako bi u životu volio biti "matematičar, vozač kamiona ili istraživač svemira". "Bilo bi lijepo raditi za Cambridge. Postoji nekoliko stvari na kojima bih volio raditi. Volio bih riješiti Riemannovu hipotezu", mišljenje je sada 14-godišnjeg Arrana.

*Jutarnji list, 10. siječnja 2010.*