

Neobična aritmetika



Kajetan Šeper, Slavonski Brod

1. Anegdoticna priča

Počnemo ovaj člančić anegdoticnom pričom koju smo čuli od starijeg kolege, bivšeg nadzornika nastave u osnovnim školama. Među nadzornicima se o sadržaju priče govorilo kao o istinitom događaju.

Pri nadzoru nastave o razlomcima u jednom razredu nadzornik primijeti da učitelj ili nastavnik objašnjava zbrajanje razlomaka na neobičan način. Nakon završenog školskog sata, kada su učitelj i nadzornik već bili sami na hodniku, nadzornik upita učitelja:

*Zašto učite djecu zbrajati razlomke na nepropisan način tako da se **brojnik zbroji s brojnikom i nazivnik s nazivnikom**:*

$$\frac{d}{n} [+] \frac{d_1}{n_1} = \frac{d + d_1}{n + n_1}, \quad (1')$$

a ne kako se zbraja po uobičajenom i u čitavom svijetu prihvaćenom, promišljenom i utemeljenom propisu:

$$\frac{d}{n} + \frac{d_1}{n_1} = \frac{d n_1 + d_1 n}{n n_1} \quad (1)$$

Učitelj mu odgovori:

Iz svoga nastavnog iskustva primijetio sam da ovako učenici mnogo lakše i brže nauče zbrajati razlomke isto tako kao što ih množe:

$$\frac{d}{n} \cdot \frac{d_1}{n_1} = \frac{d \cdot d_1}{n \cdot n_1}. \quad (2') = (2)$$

Ako nije istinito, ipak je dobro izmišljeno (tal. *Se non e vero, e ben trovato.*). Šutnja je zlato, ali izgovor i dosjetka također mnogo vrijede. Neki bi zajedljivac ironično rekao: *Duhovito i snalažljivo, prava inovacija*. I sve bi ostalo na tome.

Mi ipak idemo dalje!

Ova nas priča potiče da istaknemo najmanje *dvije uloge razlomaka* u znanosti i drugim područjima života, posebice gospodarstvenog i sportskog. Jedno su **klizni**, *promjenjivi, nestalni i nepostoja*ni razlomci vezani za *omjere i omjerne (racionalne) brojeve* (lat. *ratio* = omjer) kojima se koriste znanstvenici gotovo svih struka, a u vezi s mjerenjem veličina. Drugo su **čvrsti**, *nepromjenjivi, stalni i postojani* razlomci kojima se ljudi koriste u razne druge svrhe.

Obična aritmetika razlomaka i omjera ima svoje, ali drukčije zakone od neobične aritmetike. Sljedeći odlomak 2., ako je nekome potreban, stoji samo za prisjećanje poznatih zakona obične aritmetike, a inače se može odmah prijeći na odlomak 3.

2. Obična aritmetika – klizni razlomci i omjeri

U ovom se odlomku s ciljem usporedbe s daljnim razmatranjima sažeto izlažu osnovne činjenice s *omjernim (racionalnim) brojevima* pretpostavljajući osnovno poznavanje prirodnih brojeva $n \in \mathbf{N}$, s $n \geq 1$ ili $n \in \mathbf{N}_0$, s $n \geq 0$, te cijelih brojeva $d \in \mathbf{D}$.

Temelj su omjernih brojeva uređeni parovi $(d, n) \in \mathbf{D} \times \mathbf{N}$, koji se označavaju $\frac{d}{n}$ i zovu **razlomci (frakcije)**. Da bi se odrazila bit omjera, određuje se sljedeći odnos (relacija) **jednakosti** (ekvivalencije, klasifikacije) među njima.

$$\frac{d}{n} = \frac{d_1}{n_1}, \quad (3a)$$

ako je za svaki $k \in \mathbf{N}$, $d_1 = kd$ i $n_1 = kn$, ili $d = kd_1$ i $n = kn_1$, tj. ako je dopustivo tzv. proširivanje ("produljivanje"), odnosno skraćivanje ("sužavanje").

Bez te jednakosti ne bi bilo moguće "proširivanje ni skraćivanje" razlomaka. Upravo zbog te mogućnosti ti se razlomci i mogu nazvati *kliznima*.

Jednakost (3a) obično se određuje jednostavnije.

$$\frac{d}{n} = \frac{d_1}{n_1} \iff dn_1 = d_1n. \quad (3b)$$

Zakoni obične aritmetike omjernih brojeva su: jednakost (po (3a) ili (3b)) je:

— povratna (refleksivna):

$$\frac{d}{n} = \frac{d}{n};$$

— zrcalna (simetrična):

$$\frac{d}{n} = \frac{d_1}{n_1} \implies \frac{d_1}{n_1} = \frac{d}{n};$$

— prijelazna (tranzitivna):

$$\frac{d}{n} = \frac{d_1}{n_1} \text{ i } \frac{d_1}{n_1} = \frac{d_2}{n_2} \implies \frac{d}{n} = \frac{d_2}{n_2}.$$

Zbrajanje (i množenje) (po (1) i (2)) je:

— neovisno o redoslijedu (komutativno):

$$\frac{d}{n} + (\cdot) \frac{d_1}{n_1} = \frac{d_1}{n_1} + (\cdot) \frac{d}{n};$$

— neovisno o načinu združivanja (asocijativno):

$$\frac{d}{n} + (\cdot) \left(\frac{d_1}{n_1} + (\cdot) \frac{d_2}{n_2} \right) = \left(\frac{d}{n} + (\cdot) \frac{d_1}{n_1} \right) + (\cdot) \frac{d_2}{n_2}.$$

Zbrajanje "ima" *ništicu (nulu)*: $0 := \frac{0}{1}$, za koju vrijedi zakon:

$$\frac{d}{n} + 0 = \frac{d}{n}$$

i *suprotnik (negativ)*: $-\frac{d}{n} := \frac{-d}{n}$, za koji vrijedi zakon:

$$\frac{d}{n} + \left(-\frac{d}{n} \right) = 0.$$

Množenje "ima" *jedinicu*: $1 := \frac{1}{1}$, za koju vrijedi zakon:

$$\frac{d}{n} \cdot 1 = \frac{d}{n}$$

i *obratnik (reciprok)*: $\left(\frac{d}{n} \right)^{-1} := \frac{\pm n}{|d|}$, ali samo za $d \neq 0$, za koji vrijedi zakon:

$$\frac{d}{n} \cdot \left(\frac{d}{n} \right)^{-1} = 1,$$

(pritom $\pm$ označava predznak (lat. *signum*) $\operatorname{sgn} d := +1$ ako je $d > 0$, a -1 ako je $d < 0$; $|d|$ označava apsolutnu vrijednost, tj. $|d| := d$ ako je $d > 0$, a $-d$ ako je $d < 0$.)

Zbrajanje i množenje povezano je zakonom *raspodjele (distribucije) množenja prema zbrajanju*:

$$\left(\frac{d}{n} + \frac{d_1}{n_1} \right) \cdot \frac{d_2}{n_2} = \frac{d}{n} \cdot \frac{d_2}{n_2} + \frac{d_1}{n_1} \cdot \frac{d_2}{n_2};$$

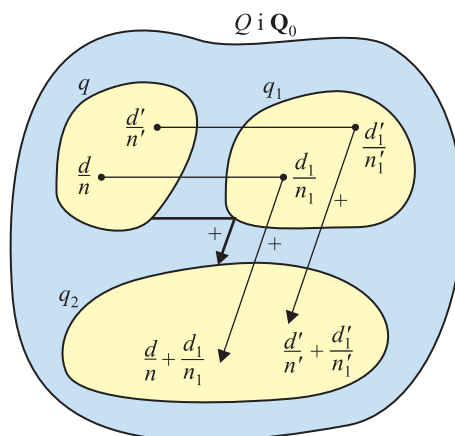
$$\frac{d}{n}, \frac{d'}{n'}, \frac{d_1}{n_1}, \frac{d'_1}{n'_1} \in Q$$

$$q = \left[\frac{d}{n} \right] = \left[\frac{d'}{n'} \right] \in Q_0$$

$$q_1 = \left[\frac{d_1}{n_1} \right] = \left[\frac{d'_1}{n'_1} \right] \in Q_0$$

$$q_2 = q + q_1$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{d}{n} + \frac{d_1}{n_1} \right] = \left[\frac{d'}{n'} + \frac{d'_1}{n'_1} \right] \\ &= \left[\frac{dn_1 + d_1n}{nn_1} \right] = \left[\frac{d'n'_1 + d'_1n'}{n'n'_1} \right] \end{aligned}$$



Slika 1. Zbrajanje razlomaka $\frac{d}{n} \in Q = \mathbf{D} \times \mathbf{N}$ i razreda $q = \left[\frac{d}{n} \right] \in Q_0 = Q/\sim$

a također je *suglasno* (konzistentno, korektno) s jednakošću (vidi sliku 1.):

$$\frac{d}{n} = \frac{d'}{n'} \text{ i } \frac{d_1}{n_1} = \frac{d'_1}{n'_1} \implies \frac{d}{n} + (\cdot) \frac{d_1}{n_1} = \frac{d'}{n'} + (\cdot) \frac{d'_1}{n'_1}.$$

Jednakost omogućava prijelaz sa skupa $Q := \mathbf{D} \times \mathbf{N}$ razlomaka $\frac{d}{n} := (d, n)$ na skup $Q_0 := Q/\sim$ razreda s obzirom na jednakost = (modulo $\sim$); pri tom svaki razred sadrži sve međusobno jednake razlomke, a svi zajedno tvore tzv. rastav skupa Q na međusobno isključive (disjunktne) skupove – rastavnice.

Svaki razlomak $\frac{d}{n} \in Q$ pridružuje se razred $q = \left[\frac{d}{n} \right] \in Q_0$ koji ga sadrži i koji je njime jednoznačno određen. Svaki razlomak je u tom smislu *predstavnik* (representant) pridruženog razreda, a svaki je skup međusobno nejednakih predstavnika svih razreda *predstavnik* skupa Q_0 svih razreda.

Navedeni prijelaz s razlomaka na razrede omogućava jednostavan prijenos zbrajanja i množenja razlomaka na razrede: ako je $q = \left[\frac{d}{n} \right]$ i $q_1 = \left[\frac{d_1}{n_1} \right]$ tada je (vidi sliku 1.):

$$q + (\cdot) q_1 = \left[\frac{d}{n} + (\cdot) \frac{d_1}{n_1} \right].$$

Na taj su način razredi postali *omjerni* (racionalni) brojevi – s osnovnog tla razlomaka i jednakosti među njima te zbrajanja i množenja s njima prešlo se na novo tlo razreda s jednom bitnom razlikom (i malom prednošću) da je jednakost među razredima **istovjetnost (identitet)**, ali račun razreda ipak se izvodi u računu razlomaka.

3. Neobična aritmetika – čvrsti razlomci

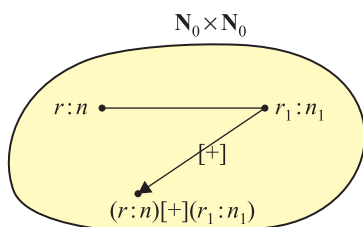
U 1. odlomku upoznali smo “lakši” način zbrajanja koji ne zadovoljava zakon suglasnosti s uobičajenom jednakošću a koji je bio bitan za omjere. Budući da bez tog zakona nema nikakve aritmetike, a želimo li ipak, zbog nekih praktičnih primjena, zadržati to neobično zbrajanje, moramo promijeniti odredbu uobičajene jednakosti.

Da bismo ostvarili tu želju i osmislili neobično zbrajanje, moramo odabrati najfiniju jednakost, tj. **istovjetnost (identitet)**:

$$\frac{d}{n} [=] \frac{d_1}{n_1} : \iff d = d_1 \text{ i } n = n_1. \quad (3')$$

U sljedećem odlomku, umjesto općih razlomaka oblika $\frac{d}{n}$, ograničit ćemo se razmatranjem posebnih razlomaka $\frac{r}{n}$, s $r \geq 0$ ali i $n \geq 0$, dakle dopustivši i $n = 0$; drugim riječima, $\frac{r}{n} \in \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$. Pritom ćemo za oznaku $\frac{r}{n}$ uporabiti oznaku $r : n$ (čitaj “ r prema n ”), a razred $\left[\frac{r}{n}\right] = \left\{\frac{r}{n}\right\}$ poistovjetiti (identificirati) s razlomkom $\frac{r}{n}$ (vidi sliku 2.).

$$(r : n)[+](r_1 : n_1) = (r + r_1) : (n + n_1)$$



Slika 2. Neobično zbrajanje razlomaka $\frac{r}{n} = r : n \in \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$

Dakako da ne očekujemo u neobičnoj aritmetici iste zakone zbrajanja i množenja obične aritmetike.

Ipak svi *opći* zakoni obične aritmetike: zakon komutacije, asocijacije i distribucije, a jasno i zakon suglasnosti, vrijede i u neobičnoj aritmetici, ali **ne** i *posebni* zakoni.

Zbrajanje “ima” ničicu:

$$[0] := \frac{0}{0}, \quad (4')$$

ali **ne** i suprotnika. Množenje “ima” jedinicu:

$$[1] := \frac{1}{1}, \quad (5')$$

ali **ne** i obratnika.

Zadatak 1. Koji od navedenih zakona neobične aritmetike vrijede u slučaju

a) općih razlomaka $\frac{d}{n}$;

b) posebnih razlomaka $\frac{r}{n}$, s $r \geq 0$ i $n > 0$?

Zadatak 2.

- Postoji li, neovisno o bilo kakvim primjenama, jednakost drukčija od istovjetnosti takva da neobično zbrajanje i množenje budu usuglašeni s tom jednakošću?
- Odredi sve takve jednakosti!

4. Primjenjivost neobičnog zbrajanja “razlomaka”

Svaka aritmetika – nauka o brojevima (grč. *arithmos* = broj) – ima širi ili uži opseg primjene. Neke su primjene sveopće prihvaćene u znanosti, a moguće i u nastavi, u zadacima za vježbe ili kao kuriozitet, a ostale se pojavljuju i u stručnim i praktičnim djelatnostima u običnom životu. Sve zavisi od toga u koju se svrhu aritmetika upotrebljava tj. od tumačenja njezine sveze s odabranim područjem znanstvenog, nastavnog, strukovnog i praktičnog djelovanja.

Iako se priča u odlomku 1. doima kao vic, ipak se tamo navedeno zbrajanje “razlomaka” pojavljuje u nekim praktičnim djelatnostima. Navest ćemo dvije takve primjene: jedna je u *knjigovodstvu* u svrhu pogleda poslovanja neke tvrtke T s tvrtkom-puncem K_i ; $K_1, K_2, \dots$ i zaključaka o dugovanju i potraživanju, a druga je u *sportu* u svrhu pregleda golova, bodova i sličnog u tijeku natjecanja u raznim “igrama” i zaključka na završetku natjecanja o donekle objektivnoj procjeni kakvoće protivničkih momčadi i igre u cjelini po više značajki.

U *knjigovodstvu* se pregled poslovanja, tj. promet robe i novca za svaku vrstu robe koju tvrtka (poduzeće i slično) T isporučuje svakoj drugoj tvrtki-kupcu K_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, s kojom posluje, vodi u knjizi s dva stupca na svakoj stranici: lijevo *duguje*, s upisima iznosa $d_{(i)j}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, a desno *potražuje*, s upisima iznosa $p_{(i)k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Nakon određenog manjeg i većeg vremenskog razdoblja, *periodično*, zbroje se upisani iznosi u jednom i odvojeno u drugom stupcu odnoseći se

na svakog kupca K_i i tako se dobiju zbrojevi $D_i := \sum_j d_{(i)j}$ i $P_i := \sum_k p_{(i)k}$. Nazovimo taj uređeni par podataka (D_i, P_i) , za svaki i , *bilanca poslovanja tvrtke T s kupcem K_i* i označimo ga s $D_i : P_i$ (vidi sliku 3.a)).

Svrha vođenja takvog dvojnog knjigovodstva jest uvid je li *razlika* $D_i - P_i > 0, = 0$ ili < 0 , tj. je li $D_i > P_i$, $D_i = P_i$ ili $D_i < P_i$. U prvom slučaju K_i duguje T -u, $D_i - P_i$; u drugom slučaju stanje je uravnoteženo; u trećem slučaju K_i potražuje od T -a $P_i - D_i$.

Kupac K_i		
duguje	potražuje	
$d_{(i)1}$	$p_{(i)1}$	$D := \sum D_i$
$d_{(i)2}$	$p_{(i)2}$	$P := \sum P_i$
$d_{(i)3}$	$p_{(i)3}$	
$\vdots$	$\vdots$	
$D_i := \sum_j d_{(i)j}$	$P_i := \sum_k p_{(i)k}$	
a) $D_i : P_i$		b) $D : P$

Slika 3. a) pojedinačna i b) cjelokupna bilanca

Iz tih *pojedinačnih* bilanci $D_i : P_i$ proizilazi *cjelokupna bilanca*:

$$D : P := (D_1 : P_1)[+](D_2 : P_2)[+] \dots,$$

skraćeno:

$$\left[\sum_i \right] (D_i : P_i)$$

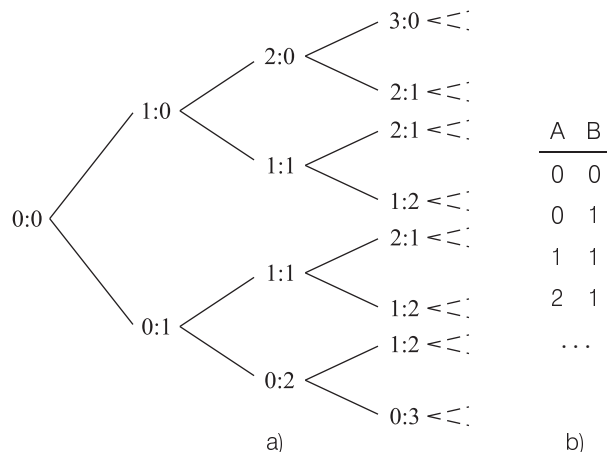
poslovanja tvrtke T sa svim kupcima K_i . Pri tome se pojedinačne bilance $D_i : P_i$ zbrajaju kako je već navedeno u točki 3, o neobičnoj aritmetici, tako da je (vidi sliku 3.b)):

$$D : P = \left(\sum D_i \right) : \left(\sum P_i \right).$$

To je samo pojednostavnjen uvid u mnogo složeniju bilančnu dokumentaciju koja se dalje stručno obrađuje primjenom tzv. *bilančne analize*.

U *sportu* se na isti način uspjeh ili neuspjeh dviju protivničkih momčadi ili dvaju natjecatelja, A i

B , predočava *usporedbom* $a : b$ broja a i b , recimo golova u nogometu ili bodova u boksu (vidi sliku 4.a) i 4.b)).



Slika 4. Pokazatelj a) mogućih i b) ostvarenih uspjeha $a : b$ tijekom utakmice

Želimo li objektivno procijeniti odigranu utakmicu po nekom odabranom pojedinačnom svojstvu: kakvoći, pravilnosti, ljepoti, dinamici itd. ili cjelovitu igru po svim važnim svojstvima, moramo odabrati pripadne brojčane značajke. O tome koja su važna svojstva i pripadne brojčane značajke, i kako na temelju njih procijeniti stupanj pojedinačnog svojstva ili cjelokupne igre svake momčadi i usporediti ih međusobno, bave se stručnjaci kineziolozi, sportski suci, treneri, sportski novinari, pa i sami igrači i navijači. Čini se da je vrlo teško ili čak nemoguće doći do jedinstvenog stava o tome, ali ako dođe do malog odstupanja, procjena općenito zadovoljava.

Jedna od numeričkih značajki igre jest *apsolutna razlika* $|a - b|$ pripadnih golova ili bodova jedne, a , i protivničke momčadi ili pojedinačnog natjecatelja, b . Druga je značajka *ukupan broj* $a + b$ golova ili bodova obje momčadi ili natjecatelja. Itd.

Prosudba se može, i treba, osloniti i na više značajki. Na taj se način mogu uspoređivati dvije utakmice istih međusobno protivničkih momčadi ili natjecatelja.