

# Metodički aspekti abakusa

## I. dio

*Ivan Matić, Domagoj Ševerdija, Osijek\**

Nastavna pomagala neizostavan su dio gotovo svakog sata matematike. Dok neka od njih služe za razvijanje geometrijskog zora ili za lakše memoriranje formula i postupaka, druga se koriste u cilju rasterećivanja učenika od provođenja dugih i kompliciranih računskih postupaka, koji u sebi često ne skrivaju dodatnu interesantnu problematiku, no ipak zahtijevaju punu koncentraciju.



## Uvod

Posljednjih se godina primjena računala u nastavi ističe kao jedna od najzastupljenijih tema na skupovima nastavnika matematike. Primjena računala u nastavi ima brojne potencijalne prednosti te izaziva mnoge polemike o obliku svog konačnog uvođenja u nastavu, a pronašla je i zaslužno mjesto na stranicama MiŠ-a. Stoga zainteresirani čitatelj može više o njoj naći u zanimljivim člancima [1] i [2]. Za razliku od računala, abakus neće samostalno obaviti račun umjesto vas, neće vam ponuditi sredstva za izradu raznoraznih šarenih prezentacija, no zato ima snažan doprinos razvoju dojma o manipulaciji brojevima, njihovoj veličini i odnosu. Također, dok će korištenje računala u potpunosti rasteretiti učenike od provođenja šablonskih postupaka i dugotrajnih uvježbavanja nemaštovitih makinalnih

radnji, abakus će u tome pridonijeti samo djelomično. No, uloga je abakusa u tome da učenicima neinovativnu rutinu pretvori u slikovit i poticajan postupak koji mogu dijelom i sami kreirati. Time predstavlja prijelaz između računanja na papiru i računanja na računalu. Na određen način, taj se prijelaz može smatrati evolucijom svakodnevnog računanja.

Podsjetimo kako je 2009. godina evolucije. Sakupimo li na jednu hrpu sve poveznice nastave matematike i informatike s evolucijom općenito, na samom vrhu te hrpe naći će se upravo abakus. Iz toga su se razloga autori ovog rada opredijelili da na ovogodišnjem Festivalu znanosti održe radionicu na temu 'Abakus – prvo računalo', u kojoj su zainteresiranim učenicima osnovnih i srednjih škola prezentirali način rada na abakusu, zajedno s njegovim prednostima i nedostacima. Nakon radioni-

\*Autori su asistenti na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku.

ce, održane na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa J. Strossmayera u Osijeku, interes za abakusom proširio se među dijelom kolega i još nekim nastavnicima. Također su u međuvremenu nastali i radovi [5] i [6], izgrađeni na temelju problematike koja se pojavljuje u ograničenjima prilikom provođenja računskih postupaka na abakusu. Danas smo i sami iznenađeni koliko ta jednostavna i naizgled primitivna sprava skriva zanimljivosti i izazova.

U ovom radu želimo podijeliti naša iskustva stečena kako tijekom radionice, tako i u samim pripremama za nju. Također nam je namjera iznijeti brojne karakteristike abakusa koje su nam bile motivacija za Festival znanosti i daljnji rad koji je uslijedio. Mnoge od navedenih karakteristika predstavljaju i bitne značajke u nastavi matematike.

Napominjemo kako naš cilj nije potaknuti nužno uvođenje abakusa u svakodnevnu nastavu matematike (ili informatike). No, već i najjednostavniji oblik abakusa može u potpunosti zamijeniti primjenu bojica ili raznobojnih štapića prilikom učenja zbrajanja i oduzimanja u nižim razredima osnovne škole. Osim toga, struktura abakusa i ograničenost prikaza znamenki pogodna je za računanje u različitim brojevnim sustavima. Napose, abakus predstavlja povijesno pomagalo pri računanju i učenju provođenja računskih operacija te možda i ključni korak pri razvoju današnjih računala, pa iz tih razloga zauzima istaknuto mjesto kako u metodici nastave matematike, tako i u njejoj popularizaciji. Time abakus svakako zaslužuje da svaki zaljubljenik u skrivene tajne matematike produbi svoje znanje o njemu.

imali i prigodu vidjeti abakus uživo ili raditi na nekoj od njegovih inačica, no za razumijevanje njegovih prednosti ipak je potrebno pobliže ga poznavati.

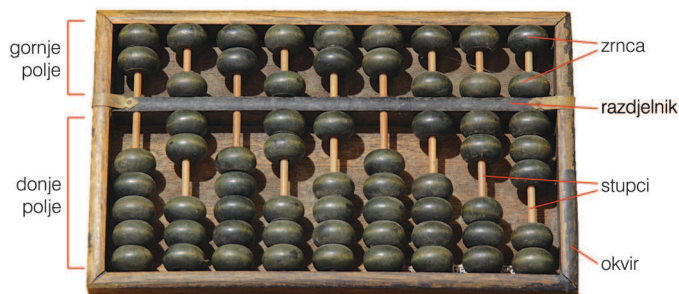
Ovisno o primjeni i lokaciji, postoje mnoge vrste abakusa – preko običnog školskog (sa šarenim kuglicama koje doprinose živosti računanja), rimskog, ruskog (možda nama zemljopisno i najbližeg), sve do japanskog i kineskog. Opredijelili smo se za opis rada na kineskom abakusu, zbog njegove rasprostranjenosti, pogodnosti za računanje u drugim brojevnim sustavima, ali i zbog dostupnosti internetskih programa koji simuliraju računanje na njemu [7] (dakle, i iz praktičnih razloga).

Kineski abakus sastoji se od drvenog ili metalnog okvira pravokutnog oblika, koji jedna poprečna letvica (razdjelnik) dijeli na gornje i donje polje. Kroz razdjelnik je paralelno nanizano nekoliko vertikalnih stupaca (obično drvenih) i na svakom od njih nalaze se zrnca (kuglice) – po dva u gornjem i pet u donjem polju. Stupci su glatki, tako da se zrnca mogu nesmetano pomicati po njima. Broj stupaca varira ovisno o veličini abakusa; standardni kineski abakus ima 13 stupaca, no postoje abakusi s čak njih 30. Ponekad su neki stupci drugačije boje, čime se obično naglašava mjesto decimalne točke.

Zrnca se smatraju uračunatima ako su pomaknuta prema razdjelniku, dakle zrnca iz gornjeg polja uračunata su ako su pomaknuta prema dolje i obratno. Svako zrnce iz gornjeg polja ima vrijednost 5, dok svako zrnce iz donjeg polja vrijedi 1. Na primjer, broj 8 se na određenom stupcu zapisuje spuštanjem jednog zrnca iz gornjeg polja i podizanjem triju zrnaca iz donjeg polja (naravno, riječ

### Kako abakus izgleda i kako na njemu raditi

Prije nego što krenemo s iznošenjem metodičkih značajki abakusa, smatramo kako ipak treba opisati njegove tehničke značajke. Naime, zasigurno ste vidjeli abakus na nekoj slici, a vjerojatno su mnogi od vas



Slika 1. Kineski abakus

je o zncima koja se nalaze na tom stupcu). Redovi znaca najbližih okviru abakusa predstavljaju takozvana *kontrolna* zrnca, te se ona ne koriste prilikom rada u dekadskom brojevnom sustavu (no osnova su rada u brojnim sustavima s bazom različitom od 10). Kao i inače, broj se zapisuje kao niz znamenki – nakon odabira stupca na kojem će biti zapisana bilo znamenka jedinica bilo vodeća znamenka tog broja, preostale znamenke se zapisuju na susjednim stupcima, na svakom po jedna. Korisnik može svojevoljno odabrati mjesta za zapis promatranog broja, tj. uzastopne stupce na kojima će zapisati broj, ovisno o veličini promatranog broja, broju stupaca abakusa i potrebama računa. Spomenuta sloboda odabira također pozitivno utječe na kreativnost korisnika. U slučaju zapisa decimalnog broja, ponovno korisnik sam odabire poziciju decimalne točke.

U radu [5] detaljno je opisano provođenje osnovnih računskih operacija na kineskom abakusu. Slične se upute mogu naći i u radu [3]. Svejedno, ovo je sjajno mjesto da ukratko opišemo kako prenijeti postupke računanja s papira na abakus. Ljubiteljima računanja na ruskom abakusu i svima koji su ga vidjeli u trgovinama nekadašnjeg Sovjetskog Saveza preporučujemo rad [4].

## Operacije na abakusu

Predstaviti ćemo osnovne aritmetičke operacije na abakusu na primjeru brojeva **463** i **29**. Tijekom opisa zbrajanja i oduzimanja smatrat ćemo da za decimalna mjesta služe dva krajnja desna stupca abakusa.

## Operacija zbrajanja

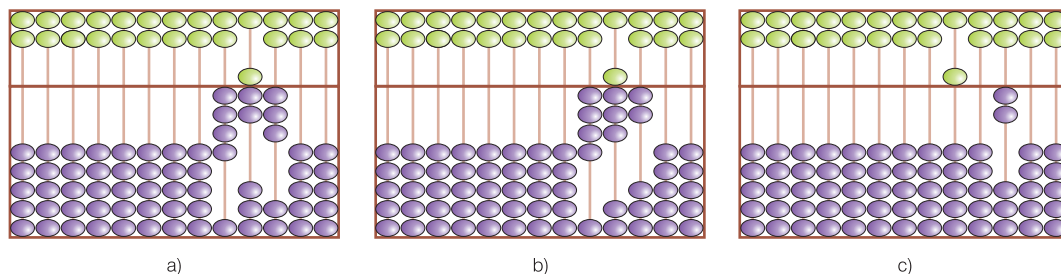
Operacija zbrajanja prati postupak vrlo sličan zbrajanju na papiru, kao što je uostalom slučaj i kod svih računskih operacija. Prvi pribrojnik (u ovom slučaju **473**) zapiše se prvi na abakus na odgovarajuće stupce. Drugi broj (**29**) pridodaje se prvom zdesna nalijevo, bez prethodnog zapisivanja na abakus (u praksi se postupak može promatrati i slijeva nadesno). Postupak je objašnjen na slici 2.

Na slici 2.a) postavljamo prvi pribrojnik na odgovarajuće stupce abakusa. Promotrimo postupak po stupcima:

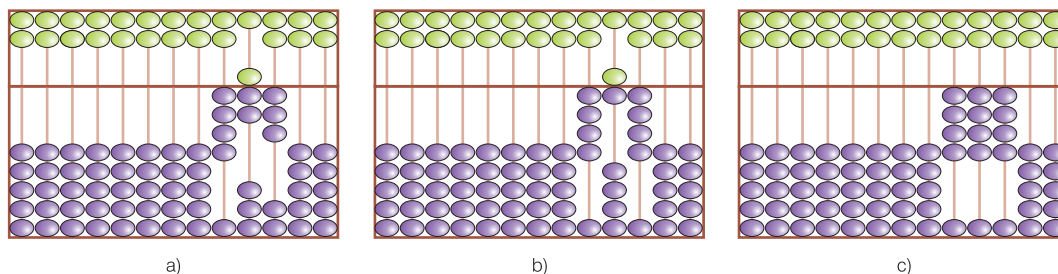
- *Stupci jedinica*:  $3 + 9 = 3 + (10 - 1)$ , što znači da dodajemo na stupac desetica **1**, a sa stupca jedinica oduzimamo **1** (slika 2.b)).
- *Stupci desetica*: Na trenutačno stanje dodajemo **2**:  $8 + 2 = 0 + 10$ , što znači da stupac desetica ostavljamo prazan, dok **10** zapisujemo na stupac stotica, dodajući **1** (slika 2.c)).
- *Stupci stotica*: Na trenutačno stanje dodajemo **0**, no kako smo u prethodnom koraku dodali jedno zrnce te time dobili njih  $4 + 1 = 5$ , spuštamo donja zrnca i postavljamo jedno gornje zrnce. Slika 2.c) predstavlja ovaj postupak i rezultat zbrajanja: **502**.

## Operacija oduzimanja

Slika 3. ilustrira postupak oduzimanja. Postavljamo prvo umanjnik **473** (slika 3.a)) na abakus i računamo zdesna nalijevo:



Slika 2. Postupak zbrajanja



Slika 3. Postupak oduzimanja

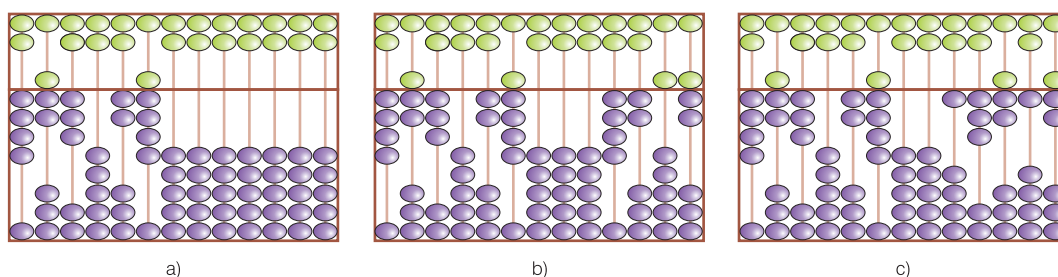
- **Stupci jedinica:** Kako je  $3 - 9 < 0$  nismo u mogućnosti direktno oduzeti 9 zrnaca od postavljena 3 na ovom stupcu. Iz tog razloga činimo posudbu sa stupca desetica – oduzimamo 1 sa stupca desetica, a razliku  $10 - 9$  pridodamo znamenkama jedinica, čime dobivamo:  $3 + (10 - 9) = 3 + 1 = 4$  (slika 3.b)).
- **Stupci desetica:** Od trenutnog stanja na deseticama oduzimamo 2:  $6 - 2 = 4$  (slika 3.c)). Kako 2 ne možemo oduzeti od donjeg dijela, oduzimamo od gornjeg dijela jedno zrnice vrijednosti 5, a višak  $5 - 2 = 3$  dodamo dolje:  $1 + 3 = 4$ .
- **Stupci stotica:** Kako nemamo posudbu sa stotica niti oduzimanje stotica, stanje na abakusu odgovara prethodnom stanju. Slika 3.c) pokazuje rezultat oduzimanja brojeva 473 i 29,  $473 - 29 = 444$ .
- **Prvi parcijalni produkt:** Postavljamo prvi i drugi faktor slijeva na abakusu, s tim da ostavimo jedan stupac prazan između faktora i jedan stupac prazan iza faktora (slika 4.a)). Iza zadnjeg rezerviranog praznog stupca, upisivati ćemo parcijalne produkte te ih odmah zbrajati. Na slici 4.b) zapisani su faktori 473|29 i sljedeći broj je parcijalni produkt  $473 \times 9 = 27 + 630 + 3600 = 4257$ . Parcijalni produkt računamo tako da redom direktno zbrajamo  $9 \times 3 + 9 \times 70 + 9 \times 400$ .
- **Drugi parcijalni produkt:** Množimo 473 s 2(0) i parcijalni produkt  $473 \times 2(0) = 946(0)$  pomaknut za jedan stupac ulijevo dodajemo prvom parcijalnom produktu:  $4257 + 9460 = 13717$  (slika 4.c)).
- **Rezultat:** Kako smo prošli svim znamenkama drugog faktora, trenutno stanje (slika 4.c)) na desnoj strani abakusa predstavlja produkt faktora 473 i 29, koji je jednak 13717.

### Operacija množenja

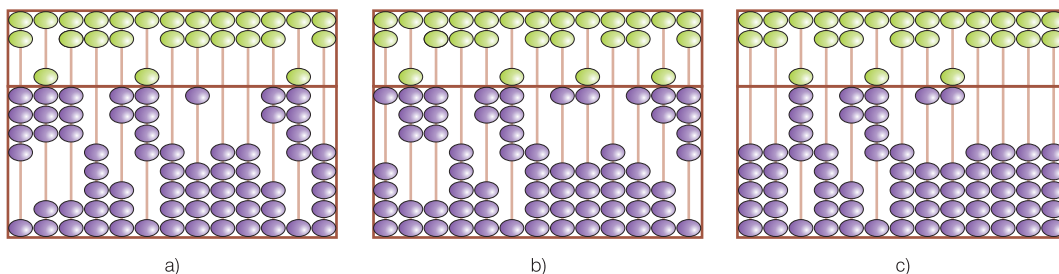
Postupak množenja složeniji je od zbrajanja i oduzimanja. Kod množenja moramo zapisivati na abakusu oba faktora (slika 4.a)). Pristup slijedi princip množenja na papiru, pa je potrebno omogućiti zapis parcijalnih produkata prilikom množenja.

### Operacija dijeljenja

Dijeljenje je operacija koja predstavlja spoj dosad spomenutih operacija te možemo reći da predstavlja najsloženiju osnovnu računsku operaciju. Kao i



Slika 4. Postupak množenja



Slika 5. Postupak dijeljenja

kod množenja, potrebno je zapisati djeljenu i djeli-  
telj na abakus (na lijevoj strani) te ih ograditi po jed-  
nim praznim stupcem. Sljedeći korak prati postu-  
pak dijeljenja kakav se uobičajeno provodi na papi-  
ru: dijelimo početni dio djeljenu s djeli-  
teljem i par-  
cijalni kvocijent zapisujemo na predviđeno mjes-  
to. Računamo parcijalni produkt na desnoj strani  
abakusa, koji oduzmemo od djeljenu. Postupak  
ponavljamo dok razlika djeljenu i parcijalnog pro-  
dukta ne postane manja od djelitelja. Konkretno u  
našem primjeru opisani postupak izgleda ovako:

- *Zapis djeljenu i djelitelja, prvi parcijalni kvocijent:* Na lijevoj strani abakusa zapisujemo  $473|29$  nakon čega slijedi parcijalni kvocijent  $47(0)/29 = 1(0)$ . U desnom dijelu abakusa množimo parcijalni kvocijent s djeli-  
teljem  $1(0) \times 29 = 290$  (slika 5.a) što oduzimamo od djeljenu  $473 - 290 = 183$  (slika 5.b)). Po-  
ništimo parcijalni produkt na desnoj strani abakusa, kako bismo mogli zapisati idući.
- *Drugi parcijalni kvocijent:* Postupak sada po-  
navljamo,  $183$  dijelimo s  $29$ , kao rezultat cjelo-  
brojnog dijeljenja dobivamo  $6$  što zapisujemo na sljedeće mjesto znamenke kvocijenta (iza  $1$ ). Množimo sada  $29$  s novim parcijalnim kvocijen-  
tom i rezultat  $29 \times 6 = 174$  oduzimamo od stanja na djeljenu:  $183 - 174 = 9$  (slika 5.c)). Trenutačno stanje na abakusu govori:  $19$  na mjestu djeljenu je ostatak pri dijeljenju,  $29$  je djeli-  
telj, a  $16$  je kvocijent.

Ovim primjerom želimo ilustrirati kako aritmetičke operacije na abakusu prate aritmetičke operacije s potpisivanjem, i dobrim razumijevanjem računanja 'na papiru' vrlo se lako mogu razumjeti postupci na abakusu. Detaljnije o operacijama na abakusu može se pogledati u spomenutim referencama.

Dakle, ideja abakusa jest prenijeti poznate tehnike računanja na jednostavno pomagalo, ne više od to-  
ga i ne na bitno drugačiji način, ali zato pridonijeti brzini i intuitivnosti rada.

## Prednosti prikazivanja brojeva na abakusu

Iako učenici prilično lako usvajaju osnove zapisa brojeva na abakusu, shvaćajući broj kao niz zna-  
menki, vrlo brzo i tu može doći do poteškoća. Razlog leži u tome što djeca zapisujući brojeve is-  
ključivo na papiru (ili školskoj ploči) ne razmišljaju o veličini tih brojeva ni o broju znamenki koji trebaju zapisati. Damo li djeci unaprijed zapisan broj, u principu će ga svi početi na abakusu zapisivati kre-  
nuvši od znamenke jedinica te se zatim pomičući za po jedno mjesto lijevo. Naravno, takav pristup nije pogrešan, no problem nastaje u slučaju da učenici nemaju ispred sebe već zapisan broj.

Tijekom radionice održane na ovogodišnjem Fes-  
tivalu znanosti, učenici i osnovnoškolskog i sred-  
njoškolskog uzrasta automatski su prihvatili prika-  
zivanje brojeva na kineskom abakusu. Prikazivanje brojeva na abakusu bilo im je i novo i interesant-  
no, te su se ubrzo i sami uključivali u zadavanje primjera. Sve je išlo glatko dok je bila riječ o broje-  
vima s najviše četiri znamenke ili brojevima koji su projicirani pred njima u svom decimalnom zapisu. No, svi su redom ustuknuli pred brojem od desetak znamenki iskazanom riječima – npr. dvanaest mi-  
liardi tristo četrdeset i pet milijuna šestopedeset i četiri tisuće tristo dvadeset i jedan. Zašto je najed-  
nom broj  $12\,345\,654\,321$  takav bauk? Bi li to bilo tako i da djeca nemaju abakus pred sobom, već list



papira i olovku? Zsigurno ne bi, jer prilikom zapisivanja broja na abakusu morate unaprijed znati točno odrediti gdje započeti zapis broja.

Takvi problemi ne nastupaju prilikom zapisivanja brojeva na papiru, jer u tom slučaju nema potrebe za razmišljanjem o broju znamenki, već se one samo zapisuju u niz (ali počevši s lijeva). No, takav pristup ne razvija svijest o veličini brojeva te će samo rijetki time bez posebnog razmišljanja usvojiti koliko znamenki ima 10 milijardi, a koliko 17 milijuna.

Za razliku od zapisivanja na papiru, računalu ili kalkulatoru, prilikom zapisivanja brojeva na abakusu ne postoji tolika fleksibilnost određivanja mjesta decimalne točke, preciznije određivanja položaja znamenke jedinica danog broja. Naravno da korisnik abakusa sam odabire s koliko će decimalnih mjesta raditi, a u slučaju da nije siguran u točan broj znamenki zapis može početi od krajnjeg lijevog stupca. No, takav pristup ne prolazi u slučaju rada sa sljedećim zadanim brojevima. Tada će prvi broj možda i biti 10-eroznamenkast te će se korisnik opredijeliti da ga zapiše na lijevih 10 stupaca, ali što ako se nakon njega u računu pojavi 12-eroznamenkast broj?

U svakom slučaju, za efikasno korištenje abakusa nužno je precizno prikazivati korištene brojeve, za što je opet nužno biti u mogućnosti unaprijed odrediti njihov broj znamenki te položaj danih znamenki na stupcima abakusa. Prisiljeni da unaprijed odrede položaje znamenki, korisnici abakusa će vrlo

brzo usvojiti ispravan dojam o veličini prirodnih i decimalnih brojeva. Osim toga, razvit će i sposobnost preciznog uspoređivanja danih brojeva, ne samo na način da će biti sigurni kako je 112 milijardi veće od 10 milijuna, već i na način da prvi broj ima 4 znamenke više od drugog te je veći za otprilike 10000 puta.

Jasno, u standardnom školskom računanju ne prevladava potreba za posebnim znanjem baratanja s brojevima od 10-ak i više znamenki, jer se prilikom toga koriste iste metode kao i u slučaju mnogo manjih brojeva te se na njima dovoljno i ispraksirati. No, veličine kojima smo danas bombardirani sa svih strana upravo su multiznamenaste – svakodnevno možemo čuti za dug od 40 milijardi eura, 1000 hektopaskala, desetke milijuna potraga za radnim mjestima, brzinu od  $3 \cdot 10^8$  metara u sekundi, broja bajtova u 16 gigabajta, gomile telefonskih brojeva s kojima se susrećemo. . .

Ne usadi li se učenicima svijest o veličini brojeva, oni se svode upravo na telefonske brojeve – niz znamenki koji se najjednostavnije čita po dvije ili tri, tj. po slogovima. Radom na abakusu potrebno se znanje stječe brzo i, što je možda i važnije, na interesantan i zabavan način.

### LITERATURA

- 1/ D. Glasnović Gracin: *Računalo u nastavi matematike*, 1. dio, Matematika i škola 46 (2008.), 10–15.
- 2/ D. Glasnović Gracin: *Računalo u nastavi matematike*, 2. dio, Matematika i škola 47 (2008.), 81–84.
- 3/ Ž. Hanjš: *Kako se nekad računalo. Kineski abak*, Matka, br. 10, 67–70.
- 4/ A. Ivir: *Kako se nekad računalo. Ruski abak*, Matka, br. 9, 5–7.
- 5/ I. Matić, D. Ševerdija, S. Škorvaga: *Numerička ograničenja kineskog abakusa*, Osječki matematički list (prihvaćeno za objavljivanje).
- 6/ I. Matić, D. Ševerdija: *Grčko – kineski stil u teoriji brojeva*, Osječki matematički list (prihvaćeno za objavljivanje).
- 7/ [http://www.mathos.hr/~dseverdi/Abacus\\_web/](http://www.mathos.hr/~dseverdi/Abacus_web/)