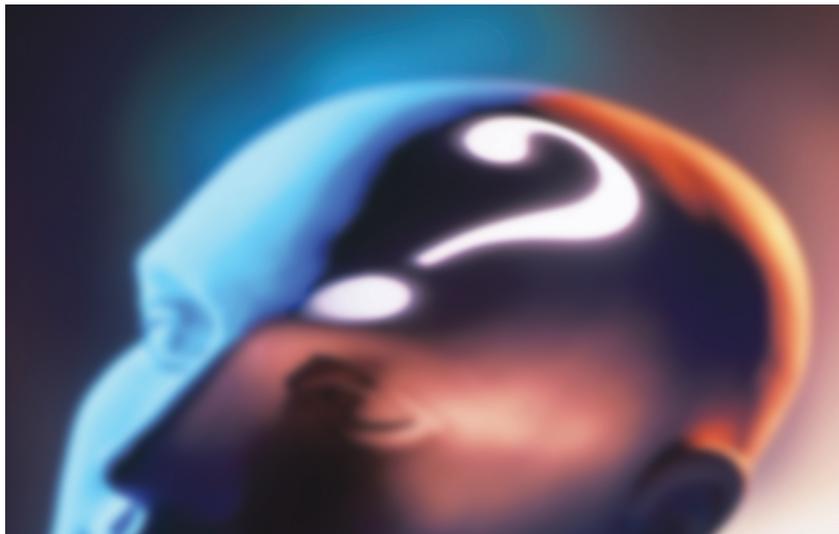


# Načelo trajnosti znanja



Zdravko Kurnik, Zagreb

Glavni općeobrazovni cilj nastave matematike jest prenošenje učenicima određenog sustava matematičkih **znanja**. Tijekom školovanja učenici stječu različita znanja, ali nije teško izdvojiti ona koja su posebno važna. To su: znanje potrebno učenicima kao pomoćno sredstvo za učenje u školi nekih drugih znanosti koje su više ili manje bliske matematici, znanje potrebno za buduću primjenu u životu i svakodnevnoj djelatnosti nakon srednjoškolskog obrazovanja, znanje potrebno kao priprema za studije na visokim školama i fakultetima na kojima postoji matematika kao nastavni predmet, znanje matematike kao općeobrazovani element i nužni dio kulture svakoga obrazovanog čovjeka.

## Načelo trajnosti znanja

Matematika je težak nastavni predmet, pojmovi koji se u njoj razmatraju apstraktni su, a matematički su sadržaji logički usko povezani i za njihovo svladavanje potreban je priličan umni napor. Njihova težina postupno raste. Zato zadaća nastavnika matematike u razredu nije jednostavna ni laka. Da bi njegova nastavna djelatnost bila uspješna, on mora voditi brigu o svim učenicima i znanjima koja pojedinim učenicima treba prenijeti.

Misao vodilja u nastavnom procesu nastavniku matematike treba biti **načelo trajnosti znanja**. Ovo načelo zahtijeva da prenošenje znanja bude takvo da se usvojena znanja u pamćenju učenika što duže zadrže. Ali kako osigurati trajnost znanja? To nije moguće postići običnim učenjem napamet mnoštva činjenica, bez dubljeg shvaćanja proučenih matematičkih sadržaja.

### Nužni uvjeti za postizanje trajnosti znanja

Prvi je uvjet **svjesno usvajanje** nastavnih sadržaja, usvajanje koje se zasniva na aktivnom umnom radu

učenika. Ovdje posebnu ulogu igra **načelo primjerenosti**.

Drugi uvjet zasniva se na **načelu sistematičnosti**. Znanja ne smiju biti rascjepkana, već uz uvažavanje **načela postupnosti** usko povezana. Sistematičnost znanja osigurava **načelo znanstvenosti** nastave matematike.

Oba uvjeta uzeta zajedno još nisu i dovoljna za trajnost znanja. Za to je još nužna odgovarajuća stručno-metodička organizacija nastave, kojoj treba dodati uvažavanje rezultata istraživanja procesa pamćenja.

## Povezanost nastavnog gradiva

Težina nastavnih matematičkih sadržaja i njihova logička povezanost može znatno utjecati na uspješnost nastave, smanjiti stupanj usvojenosti novih sadržaja, ali ima i jedna dobra stvar. Navedena logička povezanost, kao što ćemo vidjeti, olakšava ostvarenje **načela trajnosti znanja**.

Evo najprije dvaju primjera matematičkih sadržaja koji se obrađuju na nekoliko razina:

### 1) Skupovi brojeva

Nastavni program u svakoj nastavnoj godini do drugog razreda srednje škole sadrži poglavlje o nekom skupu brojeva. To u nastavi matematike omogućuje stalno ponavljanje zajedničkih svojstava skupova brojeva, čime znanje učenika o skupovima brojeva postaje **trajnije**.

Početak je skup prirodnih brojeva  $\mathbf{N}$ .

Jedna od motivacija potrebe za proširivanjem toga skupa jest zahtjev da jednačina  $a + x = b$  uvijek ima rješenje u nekom skupu brojeva. Taj se zahtjev ostvaruje u skupu cijelih brojeva:

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Jedna od motivacija potrebe za proširivanjem skupa  $\mathbf{Z}$  jest zahtjev da jednačina  $ax = b$  ima rješenje u nekom skupu brojeva. Taj se zahtjev ostvaruje u skupu racionalnih brojeva:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N} \right\}.$$

Kao što znamo, ne postoji racionalni broj  $x$  čiji je kvadrat jednak 2. Drugim riječima, jednačina  $x^2 = 2$  nije rješiva u skupu  $\mathbf{Q}$ . Međutim, takav broj postoji, jer je  $x = \sqrt{2}$  duljina dijagonale kvadrata kojemu stranica ima duljinu 1. Jednačina ima rješenje u skupu realnih brojeva  $\mathbf{R}$ , proširenju skupa  $\mathbf{Q}$ . Time je priča o skupovima brojeva u osnovnoj školi završena.

Prirodno se nameće pitanje: postoji li uopće potreba za daljnjim proširenjem područja brojeva? Do potvrdnog odgovora dolazi se razmatranjem kvadratne jednačbe  $ax^2 + bx + c = 0$ . Već najjednostavnija kvadratna jednačina  $x^2 + 1 = 0$  ukazuje na potrebu. Da bi svaka kvadratna jednačina imala rješenje u nekom skupu brojeva, skup se  $\mathbf{R}$  proširuje do skupa kompleksnih brojeva  $\mathbf{C}$ .

Kada govorimo o svojstvima skupova brojeva, prije svega mislimo na važne zakone: zakon komutacije za zbrajanje  $x + y = y + x$ , zakon komutacije za množenje  $x \cdot y = y \cdot x$ , zakon asocijacije za zbrajanje  $(x + y) + z = x + (y + z)$ , zakon asocijacije za množenje  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  i zakon distribucije množenja prema zbrajanju  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ .

### 2) Mnogokuti

Sistematična obrada ove opsežne nastavne cjeline počinje u šestom razredu osnovne škole proučavanjem trokuta i četverokuta, nastavlja se u sedmom razredu općom teorijom mnogokuta, a produbljuje u prvom razredu srednje škole. Iz obrade izdvajamo dva pitanja: zbroj kutova mnogokuta i broj dijagonala mnogokuta.

Obrada prve nastavne jedinice kreće od ranije spoznatih činjenica. Prva od tih činjenica jest izreka o zbroju svih unutarnjih kutova trokuta. Za taj zbroj  $K_3$  vrijedi jednakost  $K_3 = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

Druga činjenica je izreka da je zbroj svih unutarnjih kutova četverokuta jednak  $360^\circ$ ,  $K_4 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ . Ove dvije činjenice nadopunjuju se primjenom analogije formulama za zbrojeve svih unutarnjih kutova peterokuta, šesterokuta i sedmerokuta:  $K_5 = 540^\circ$ ,  $K_6 = 720^\circ$ ,  $K_7 = 900^\circ$ . Razmatranje završava generalizacijom: Zbroj  $K_n$  svih unutarnjih kutova mnogokuta s  $n$  stranica dan je formulom:  $K_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ .

Obrada druge nastavne jedinice provodi se na sličan način. Do formule za broj  $D_n$  svih dijagonala  $n$ -terokuta dolazimo razmatranjem sljedećih koraka:  $D_4 = \frac{4(4-3)}{2} = 2$  (četverokut),  $D_5 = \frac{5(5-3)}{2} = 2$  (peterokut),  $D_6 = \frac{6(6-3)}{2} = 9$  (šesterokut). Razmatranje završava generalizacijom: Broj  $D_n$  svih unutarnjih kutova mnogokuta s  $n$  stranica dan je formulom:  $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ .

U oba primjera ima dosta mjesta da se provjeravanjem predznanja učenika na pojedinoj razini nastave ostvari **načelo trajnosti znanja**.

## Pamćenje i zaboravljanje

Aktivnost mozga selektivnog je karaktera: mozak pamti pretežno ono što je za nas bitno, od interesa i zanimljivo. S druge strane, i uz taj uvjet stečena znanja tijekom vremena blijede i velik ih se dio zaboravlja. Nastavnik matematike treba voditi brigu o toj činjenici.

Sada se prirodno nameće pitanje: što učenik zapravo treba pamtiti? Jasno je da pamtiti sve nije nužno, niti je moguće.

Tako se dugo ne pamte precizne definicije matematičkih pojmova i točne formulacije poučaka i aksioma. Međutim, to ne znači da su odgovarajući pojmovi, poučci i aksiomi potpuno iščeznuli iz pamćenja. Oni su samo u pamćenju poprimili jednostavnije oblike.

Ne pamte se ni dokazi poučaka. Dokazi poučaka imaju važniji obrazovni cilj: služe za razvoj logičkog

i matematičkog mišljenja učenika kojim se oni osposobljavaju za samostalno traženje i nalaženje dokaza, kada se za to ukaže potreba.

## Nastavni sat

Nastavni je proces složen, sastoji se od niza elemenata i svaki od njih utječe na ostvarenje načela trajnosti znanja. Opišimo glavne elemente.

### 1. Motivacija

Motivacija je početni dio nastavnog sata. Njezin je osnovni cilj pobuđivanje interesa prema matematiци. Interes učenika prema predmetu je, kao što znamo, glavni preduvjet za uspješnu nastavu matematike jer je interes najveći poticaj za učenje. Motivacija ima različite oblike. Za nas je posebno važan onaj kojim se uspostavlja veza između već obrađenog nastavnog gradiva i gradiva koje se tek treba obraditi. Podsjećanje na tu vezu jedan je od načina ostvarenja načela trajnosti znanja.

### 2. Obrada novog gradiva

Nastavnik matematike ostvaruje načelo trajnosti znanja ako njegovo poučavanje ima sljedeće istaknute značajke:

dobru pripremu sata, racionalnu organizaciju sata, primjerenu motivaciju, pravilan izbor nastavnih oblika i nastavnih metoda za pojedine matematičke sadržaje s težištem na aktivnosti i suradnji učenika, primjereno izvođenje sata, uspješnu organizaciju ponavljanja obrađenog gradiva, dobro osmišljen način izbora i zadavanja zadataka za domaću zadaću, pravovremeno provjeravanje znanja učenika, djelotvornu aktivnost na uklanjanju praznina u znanju učenika i dr.

### 3. Aktivnost učenika

Učenici ostvaruju načelo trajnosti znanja ako njihovo sudjelovanje u nastavnom procesu ima sljedeće značajke:

jasno i kratko izlaganje usvojenih znanja u metodi razgovora i na usmenom ispitu, točno i brzo izdvajanje u pamćenju određenih definicija osnovnih pojmova, formulaciju poučaka, formula, osmišljavanje teoretskih činjenica primjerima praktične naravi, uspješno ispunjavanje različitih oblika samostalnog rada (domaće zadaće, kontrolni radovi, testovi, školske zadaće, provjeravanja znanja), umijeće primjene teorije pri rješavanju jednostavnih zadataka, pravilnu uporabu jezika, kako govornog tako i matematičkog i dr.

#### 4. Ponavljanje

U nastavi matematike postoji nekoliko različitih oblika ponavljanja koja doprinose ostvarivanju načela trajnosti znanja.

Jedan od važnijih oblika naveden je u motivaciji. To je ponavljanje onih ranije obrađenih činjenica koje su potrebne za proučavanje, razumijevanje i usvajanje novog gradiva. Ono ima još jedan cilj: osvježavanje i utvrđivanje određenog dijela predznanja učenika.

Drugi oblik ponavljanja nastavnik matematike poduzima neposredno nakon obrade novog gradiva. Kratkim usmenim ili pisanim ispitom provjerava stupanj razumijevanja i usvojenosti toga gradiva. Na taj način dobiva povratnu informaciju koje korake treba poduzeti na sljedećem nastavnom satu.

Cijeli sati ponavljanja su treći oblik. Njihova svrha je raznolika: provjera uspješnosti nastave, utvrđivanje obrađenog gradiva, popunjavanje praznina u znanju učenika, pripremanje učenika za pisane ispite.

#### 5. Zadaće

Zadaće igraju također određenu ulogu pri ostvarenju načela trajnosti znanja.

Cilj domaće zadaće jest utvrđivanje neposredno obrađenog gradiva. Ako je provjera domaće zadaće uspješna, znak je da su i učenici uspješno usvojili novo gradivo. Ako provjera domaće zadaće nije uspješna jer, recimo, više učenika zadaću

uopće nije napisalo, uspješnost je obrade novoga gradiva upitna. Isto vrijedi za ponavljanje potrebne teoretske osnove za nastavak obrade.

Cilj školske zadaće jest provjera znanja učenika stečenog kroz duži period nastave matematike. Rezultati te provjere već mogu pokazivati određene znakove trajnosti znanja.

U oba slučaja trajnije znanje može se postići primjerenim izborom zadataka i pristupačnijim zahtjevima nastavnika.

#### 6. Problemski zadaci

To je vrsta nestandardnih zadataka. Nažalost, u nastavi matematike rijetko se pojavljuju, iako oni znatno doprinose ostvarenju načela trajnosti znanja.

Mnogi problemski zadaci omogućuju rješavanje na više načina. Jedni su načini složeniji, drugi jednostavniji. Naravno, postoji i onaj najbolji način rješavanja, lijep, jednostavan i racionalan, ali njegovo otkrivanje i nije najvažnije na početku postupka rješavanja. On se izdvaja na kraju. Na početku je važan svaki način rješavanja.

Sada se prirodno nameću pitanja:

Zašto razmatrati više načina rješavanja? Zar nije dovoljan samo jedan način budući da on vodi do onoga što se traži, a to je rješenje zadatka?

Naravno da je dovoljan jedan način rješavanja ako je cilj samo rješenje zadatka. Ali ako se želi postići više, onda nije dovoljan. Što je to više? Za nalaženje rješenja zadatka potrebno je određeno znanje koje se sastoji od teorijskih činjenica koje su u najužoj vezi sa zadatkom. Za jedan način rješavanja potrebne su jedne činjenice, za drugi način neke druge činjenice, za treći treće. Zaključujemo da će za rješavanje zadatka na više načina trebati više teorijskih činjenica i metoda nego za rješavanje na samo jedan način. Time se za samo jedan zadatak aktivira, analizira i primjenjuje veća količina stečenog znanja. Osim toga, znanje se produbljuje i proširuje novim znanjima,

a najvažnije je da zadaci s više načina rješavanja povećavaju aktivnost učenika i njihov interes prema matematici. To pozitivno utječe na **trajnost znanja**.

### Priprema učenika za matematička natjecanja

Sudjelovanje učenika na natjecanjima višestruko je korisno, posebno u svjetlu činjenice da na pojedinim natjecanjima mogu sudjelovati svi učenici, a ne samo najbolji. Za svaku razinu natjecanja potrebna je odgovarajuća priprema. Priprema uključuje rješavanje problemskih zadataka i upoznavanje novih metoda rješavanja matematičkih problema. Na taj način učenici produbljuju stečena znanja, stječu nova znanja i brže napreduju.

Matematička natjecanja pružaju izvrsne mogućnosti za ostvarenje **načela trajnosti znanja** i postizanje kvalitetnijeg matematičkog obrazovanja učenika.

### Zaključak

Trajnost znanja lako bi se mogla ostvariti kad bi se gradivo češće i duže ponavljalo i utvrđivalo. Međutim, stavljen pred opsežne nastavne programe, nastavnik matematike nema velik izbor. Zato je poželjno da primjereno iskoristi one mogućnosti koje ima. Stalnim izmjenama nastavnih metoda i oblika rada te poticanjem aktivnosti svih učenika, moguće je u pojedinim segmentima nastavnog procesa postići bolje ostvarenje načela trajnosti znanja.

#### LITERATURA

- 1/ R.S. Čerkasov – A.A. Stoljar, *Metodika predavanja matematiki*, Prosvješćenie, Moskva, 1985.
- 2/ W. Glasser, *Kvalitetna škola*, prijevod s engleskog, Educa, Zagreb, 1994.
- 3/ Z. Kurnik, *Načelo primjerenosti*, Matematika i škola 48 (2009.), 100–105.
- 4/ Z. Kurnik, *Znanstveni okviri nastave matematike*, Element, Zagreb, 2009.

## NATJECANJA IZ MATEMATIKE

Agencija za odgoj i obrazovanje objavila je vremenik i katalog natjecanja i smotri u školskoj godini 2009./10. Za natjecanja iz matematike u planu su:

**Školska natjecanja:** 4. veljače 2010. u 13 sati;

**Županijska natjecanja:** 15. ožujka 2010. u 10 sati;

**Državno natjecanje:** 27. do 29. travnja 2010.