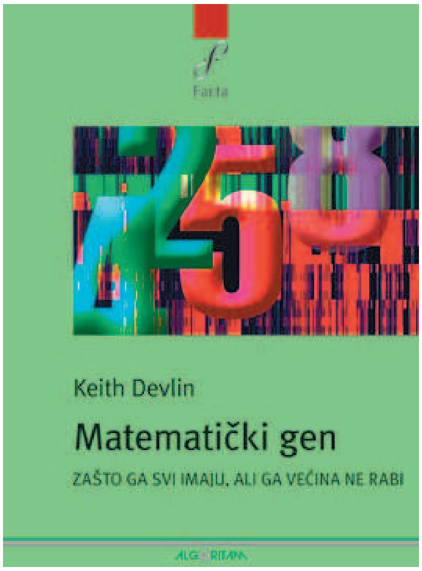
Zašto je matematika mnogima bauk?

Šime Šuljić, Zagreb

Uvod

To da je matematika mnogim učenicima najteži i najomraženiji nastavni predmet nije ništa novo. Kada se odrasli ljudi osvrnu na školske dane, priznat će kako su s matematičkim zadacima imali velikih problema. Svi smo skloni dijeliti ljude na manjinu kojoj matematika ide lako i većinu koja se više ili manje muči s matematikom. Ono što je novo jest da se danas olako poseže za individualnim instrukcijama iz matematike i da se o "problemu matematike" sve češće piše na senzacionalistički način u dnevnom tisku. Tako se čuju razne teze kako matematika nije teška, ali program nije prilagođen uzrastu učenika, kako učenicima nije dovoljno objašnjeno nastavno gradivo, kako su za sitne greške zakinuti u vrednovanju, kako se ne vidi primjena matematike pa se gubi smisao za njenim učenjem, kako je matematika prenaglašena u obrazovnom sustavu i kako bi bilo bolje da se troši vrijeme na neke druge sadržaje ili se čak postavlja pitanje čemu uopće učenje matematike kad stvara tolike frustracije. S uvođenjem državne mature u hrvatski obrazovni sustav nije onda čudno što se postavljalo pitanje mora li matematika biti obvezan ispitni predmet mature.

U ovom ću članku pokušati ukazati da problemi s kojima se neki susreću u učenju matematike leže prije svega u samoj prirodi sadržaja kojima se matematika bavi, a ne u sposobnostima koje posjeduju. Na pisanje članka ponukala me je knjiga *Matematički gen*, britanskog matematičara Keitha Devlina. Knjiga se bavi najnovijim kognitivnim spoznajama, evolucijom ljudskog mozga, razvojem jezika i njegovom strukturom, poviješću matematike i njenom biti. Knjiga je mnogo šira i, naravno, dublja od problema koji obuhvaća ovaj članak. Zbog toga toplo preporučujem ovu knjigu svakomu tko se bavi poučavanjem matematike.



Napomena. Keith Devlin je izvršni direktor Centra za istraživanje jezika i informacija, savjetnik je za matematiku na Stanford Universityju. Dobitnik je nagrade Pythagoras, nagrade Peano, nagrade Carl Sagan te nagrade Joint Policy Board for Mathematics Communications. Autor je vrlo popularne kolumne *Devlin's Angel* na portalu *Mathematical Association of America*.

Najteži prijamni na svijetu

Nije bauk matematike specifičan hrvatski problem. Slične probleme imaju i mnogi drugi obrazovni sustavi i na razne ga načine pokušavaju riješiti i približiti matematiku učenicima. Ima i onih koji inzistiraju baš na teškoj matematici pa traže učenike koji je mogu svladati. Časopis *Geo* (7/2009) donosi tako reportažu o najtežem prijamnom ispitu na svijetu, prema kojem je test iz matematike na višoj razini naše probne državne mature luk i voda. Svake se godine otprilike 300 tisuća mladih Indijaca prijavi na *Indian Institutes of Technology.* Za taj se ispit, koji se uglavnom bazira na matematici, pripremaju nevjerojatno marljivo učeći i po 18 sati na dan. Uspijeva ih svega dvoje od 100. Daleko od toga da se zalažem da naši učenici polažu tako stresne testove. Jedna mnogoljudna zemlja može si dopustiti biranje najtalentiranijih i da bude svjetski rasadnik znanstvenika. Ali i za onaj najmanji obrazovni sustav važno je da ne isključuje svoje učenike i studente iz krugova svjetske znanstvene zajednice samo zato jer matematika zahtijeva veći napor. Mnogih znanstveno-tehnoloških ostvarenja ne bi bilo bez razvoja matematike.

Putovanje na Mjesec

Već spomenuti broj časopisa *Geo*, povodom četrdesete obljetnice čovjekova spuštanja na Mjesec, opisuje taj fascinantan ljudski poduhvat. Danas, kad smo uz pomoć razvijene tehnologije u potrazi za zabavom stvorili virtualne svjetove, pobrkavši zbilju i maštu, nagledali se svakojakih *zvjezdanih staza* i *ratova zvijezda*, može nam se pričiniti da misija *Apollo 11* nije bila ništa posebno. Pa i sada astronauti lete u orbitu, a čak se govori i o svemiru kao turističkoj destinaciji. Previđamo da ovi današnji izleti vode najdalje do 600 km od površine Zemlje, a put na Mjesec dug je 384 tisuće kilometara. Dobro se sjećam te ljetne večeri kada se cijeli moj kvart natrpao kod susjeda koji je imao jedan od prvih crno-bijelih televizora u mjestu. Tada je Neil Armstrong zakoračivši na Mjesečevu površinu izrekao onu čuvenu rečenicu: "Ovo je mali korak za čovjeka, a veliki za čovječanstvo." I doista, četrdeset godina kasnije može se reći da je lansirati ljude sa Zemlje, spustiti ih na drugo nebesko tijelo i vratiti žive bila ludo hrabra avantura. Oni su imali goriva za samo desetak sekundi više leta, što je bilo posebno dramatično jer utvrđena lokacija nije bila pogodna za spuštanje! Trebalo je biti siguran i u to da će raketni motori pri povratku biti dovoljno snažni i imati dovoljno goriva za svladavanje Mjesečeve gravitacije i da će brod pravilno usmjeriti k Zemlji, a zatim se sigurno bez izgaranja spustiti kroz Zemljinu atmosferu na točno određenu lokaciju na oceanu. Bilo je tu mnoštvo tehničkih detalja koji su zahtijevali točan i vrlo precizan proračun. Bez matematike ovaj bi pothvat bio nemoguć. Nije ovdje bila riječ o uspjehu pojedinaca ili tima kao u sportu. Bio je to trijumf ljudske zajednice, živućih i umrlih znanstvenika, koji su spoznali prirodu Sunčeva sustava i matematičkim ga modelom opisali.

Što je matematika?

Nije osvajanje Mjeseca jedini primjer koji će nas uvjeriti u učinkovitost matematike, ali zašto je ona mnogim ljudima udaljena poput drugog nebeskog tijela? Možda je potrebno najprije definirati matematiku da bi nam stvar bila jasnija. I tu se već susrećemo s prvim problemom. Prva aluzija na matematiku za mnoge je pojam broja i računanje. To bi bilo vrlo usko gledanje na matematiku, a i samo računanje danas je uvelike prepušteno strojevima. Matematika se nije bavila samo brojevima, nego i drugim objektima kroz svoju povijest. Imade tu točaka, dužina, likova, krivulja, tijela, preslikavanja, funkcija, skupova, grupa, grafova, struktura, događaja, odnosa… Danas su matematičari skloni svoju znanstvenu disciplinu nazivati znanošću o obrascima. Zvuči kao vrlo zgodna i jezgrovita dosjetka, ali nam ona ne razjašnjava problem. Stoga pokušajmo s pomoću nekoliko primjera uočiti matematičku bit nekih pojava.

Primjeri

Loto ludilo. Sjećate li se loto ludila koje nas je zapljusnulo u proljeće 2009. godine? Možda ste i vi pokušali osvojiti tih četrdesetak milijuna kuna! Koliko ste pritom imali šanse?

"Znate one dječje lokote za bicikle s kombinacijom od 4 znamenke. Možete li pogoditi šifru? (Profesionalci i avanturisti isključeni!) Teško, naravno. No, to je još uvijek 3000 puta lakše nego pogoditi 1,4,5,14,22,28,34, a što je izvučeno jučer. Znam da kradljivci bicikla nisu impresionirani. Jer imaju spretne prste i ne znaju što je 3000.

Idemo onda ovako. Recimo da za nepoznatu osobu morate pogoditi mjesec, dan, sat, minutu i sekundu rođenja – u sekundu točno. Kolike su vam šanse? Pa, otprilike točno iste kao da vas zapadne super 7 *turbo jack pot* dobitak. Jer u godini imade 31 536 000 sekundi. Biste li uložili 3 kune u okladu u kojoj morate pogoditi nečiji rođendan i k

tomu još u sekundu točno vrijeme sretnog događaja? Vjerojatno ne; prije biste sami sebe poslali na promatranje. Čak i ako za svake daljnje tri kune možete kupiti još nekoliko pokušaja."
(`http://euklid.blog.hr`)

Doista, kako je autor ovog bloga tako točno izračunao vjerojatnost dobitka? Krenimo od jednostavnijeg problema.

1. Pretpostavimo da su u bubnju samo tri kuglice označene s brojevima 1, 2 i 3. Na koliko načina možemo izabrati dvije od te tri? Možemo birati kombinacije {1, 2}, {1, 3} i {2, 3}. Dakle na tri načina.
2. Ako su u bubnju četiri kuglice, moguće su ove, dvočlane kombinacije: {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4} i {3, 4}. Dakle, šest je mogućih kombinacija.
3. A ako ih je pet a izvlačimo trojke, onda je 10 mogućih kombinacija: {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 2, 5}, {1, 3, 4}, {1, 3, 5}, {1, 4, 5}, {2, 3, 4}, {2, 3, 5}, {2, 4, 5} i {3, 4, 5}.

Možemo nastaviti ovo navođenje s većim brojem kuglica u bubnju i s proizvoljnim brojem izvučenih kuglica. Matematičari su uočili da se do broja različitih kombinacija može doći određenim obrascem. U prvom slučaju to je formula:

$$\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3 .$$

U drugom slučaju to je:

$$\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6 .$$

U trećem:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 ,$$

a to onda znači da bi na primjeru našeg lota 7 od 39 broj kombinacija bio:

$$\frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} .$$

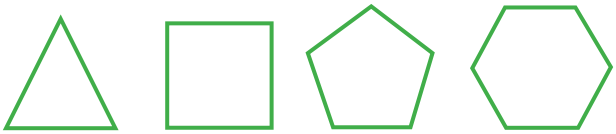
Možete li izračunati taj broj? Naravno, ne treba se mučiti jer i najobičniji znanstveni kalkulator ima tipku **nCr** i dovoljno je upisati: 39 **nCr** 7. Probajte izračunati koliki je broj kombinacija na talijanskom lotu 6 od 90. Čudi li vas onda zašto već devet mjeseci nije izvučen *jack pot* koji trenutačno iznosi 140 milijuna €?

Vratimo se otkrivenom obrascu za izračunavanje kombinacija. Matematičari ga u svojim priručnicima neće pisati u ovakvim konkretnim oblicima, nego će formulu uopćiti i reći da je, kada je riječ o n različitih elemenata od kojih se biraju k-razredne kombinacije njihov broj:

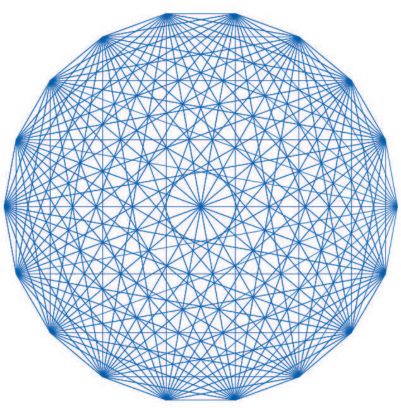
$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} = 3 .$$

Eh, sad već ovakva formula traži dodatni misaoni napor, ali moramo se složiti da je uopćavanje vrlo racionalno i korisno. Doista nema smisla pisati tisuće različitih formula. Ima smisla i potrebe za simboličkim zapisom ove dugačke formule. I doista postoji simbol $\binom{n}{k}$ koji se čita *n povrh k*. Matematika učeniku može biti zamršena i zbog svih tih simbola, ali oni su prirodno nastajali i na neki su način obrisi onoga što matematičar vidi, baš kao što glazbenik u notama prepoznaje tonove i glazbu, a ne tek puke simbole.

Pravilni mnogokuti. Matematika se ne mora nužno baviti brojem. Može i oblikom. Stari su se Grci posebno bavili geometrijom. Jedan od dobro poznatih obrazaca jest izdvojiti mnogokute kojima su sve stranice jednake duljine i kojem su svi kutovi međusobno sukladni. Najjednostavniji od takvih likova jest jednakostraničan trokut s kutovima od 60°. Slijedi kvadrat s četiri prava kuta, pa pravilni peterokut itd. Pravilnih je mnogokuta beskonačno mnogo.

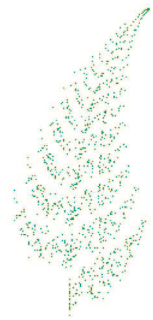


Matematiku ipak često povezujemo s brojevima i doista, oni se pojavljuju posvuda. Uz mnogokute. Mnogokutima bi, na primjer, mogli računati površinu ili dijagonale. Trokut nema dijagonala, kvadrat ima dvije, peterokut ih ima pet, šesterokut devet, a koliko ih ima ovaj osamnaesterokut na slici?



Prebrajanje neće biti baš jednostavno i kratkotrajno. Možda je čak bolje ne razmatrati pojedinačne jednostavne slučajeve nego pokušati pronaći opći obrazac. Jedan vrh mnogokuta možemo povezati sa svim vrhovima osim sa samim sobom i sa svojim susjedima. Znači, jedan vrh s njih $n - 3$, a kako je svih vrhova n ukupno možemo povući $n(n - 3)$ dijagonala. Međutim, na taj ćemo način očito svaku dijagonalu povući dva puta, pa taj broj treba prepoloviti.

Formula je dakle $\frac{n(n-3)}{2}$, odnosno ovaj osamnaesterokut ima 135 dijagonala.



Paprat. Mnogi će reći kako ne vole matematiku i njenu euklidsku pravilnost i kako u svijetu koji nas okružuje nema savršenih krugova, kvadrata, kugli … Kako matematika ne može opisati prirodne oblike, poglavito one žive prirode. Tako ako želimo dobiti sliku paprati, trebat će nam fotografski aparat, ili dobar crtač, ili neka vrsta kopiranja herbarija, ili internetska samoposluga sličica. Ova sličica lijevo vjerojatno je skinuta s interneta. A ne, ne! Matematičari su proniknuli i u takve oblike i opisali ih svojim jednadžbama. Ovu jedinstvenu sličicu nacrtalo je računalo po zadanim matematičkim jednadžbama, baš za potrebe članka koji upravo čitate. Svaku točkicu (piksel monitora) kojoj su pridružene određene koordinate transformiralo je u neke nove koordinate nasumce po nekoj od ovih četiriju formula:

$$(x, y) \rightarrow (0.0,\ 0.00016x + 0.16y),$$

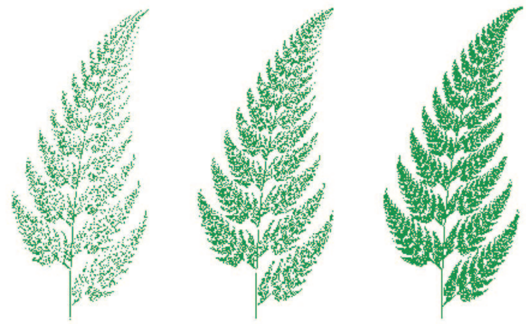
$$(x, y) \rightarrow (0.85x + 0.04y,\ -0.04x + 0.85y + 1.6),$$

$$(x, y) \rightarrow (0.2x - 0.23y,\ 0.23x + 0.2y + 1.6),$$

$$(x, y) \rightarrow (-0.15x + 0.28y,\ 0.26x + 0.24y + 0.44),$$

i to uzastopno (iterativno) mnogo puta. Dakle, kada se koordinate neke točkice transformiraju prvi put, dobije se nova točkica koja se ponovno podvrgne nekoj od četiriju transformacija i tako nekoliko desetaka tisuća puta. Tu računalo daje samo snagu, a mašta je na strani matematike. Na nizu sličica možete vidjeti rezultat dobiven redom s 1000, 5000, 10 000 i 20 000 iteracija.

Napomena. Ove slike dobio sam programom *Winfeed* (`http://math.exeter.edu/rparris`) koji je besplatan i vrlo jednostavan za uporabu. Možete mijenjati jednadžbe i dobivati paprati drukčijeg oblika, ali i druge fraktalne objekte.



U želji da pokažemo kako stereotip o matematici kao krutoj disciplini punoj beživotnih formula nije baš točan, možda smo kroz ovih nekoliko primjera prošetali previše jednostavno i nekako olako. Matematika, iako puna ljepote i vrlo kreativna, ipak je vrlo stroga disciplina i neće na temelju nekoliko uzastopnih podudarnosti prihvatiti opći zaključak. Čak i ako računalo provjeri da nešto vrijedi u milijun slučajeva, pitat ćemo se vrijedi li i za milijun i prvi slučaj. Uvijek se traži strogi logički dokaz neke tvrdnje. U tom smislu i samo definiciju matematike možemo malo proširiti: *Matematika je znanost o uređenosti, obrascima, strukturi i logičkoj povezanosti.*

Matematika je znanost bez koje druge znanosti ne bi mogle. Ona je oruđe kojim se neke pojave mogu vidjeti u svojoj srži, ili objasniti, ili predvidjeti i izračunati. Mogu dizajneri zamisliti bilo kakav avion, ali hoće li se on održati u zraku pouzdan odgovor dat će jednadžba koju je početkom osamnaestog stoljeća otkrio matematičar Daniel Bernoulli. Zamislite, davno prije pojave letjelica! I grčki je matematičar Eratosten, dvije tisuće godina prije misije *Apollo*, izračunao promjer i zakrivljenost Zemlje s nevjerojatnom točnošću.

No, nisu samo tehnika i prirodne znanosti te koje rabe matematiku. Vrlo složenu statistiku i teoriju vjerojatnosti rabe i osiguravateljske kuće. Lingvist

Noam Chomsky rabio je matematiku da "vidi" nevidljivo u apstraktnim uzorcima riječi koje prepoznajemo kao gramatičku rečenicu.

Razmišljate li matematički?

Godine 1970. britanski psiholog Peter Wason proveo je istraživanje s jednim na prvi pogled jednostavnim zadatkom, ali koji većina ljudi ne zna riješiti. Zamislite na stolu pred vama četiri igraće karte. Rečeno vam je da svaka karta na jednoj strani ima brojku, a na drugoj slovo. Na kartama koje su pred vama vidite ove simbole:

E K 4 7.

Na vama je da odredite koje karte morate okrenuti kako biste provjerili je li poštovano pravilo: *Ako je na jednoj strani karte samoglasnik, na drugoj strani karte nalazi se paran broj.* Molim vas, zastanite u čitanju i pokušajte riješiti ovaj problem.

Bez obzira na to za koje ste se rješenje odlučili vjerojatno još uvijek provjeravate. Rješavanje vam je išlo sporo i nekako ste se gombali razmišljajući? To je normalno. Provjerimo sada vaše rješenje. Vrlo vjerojatno biste okrenuli kartu E da provjerite je li s druge strane paran broj. I to svakako treba učiniti, a zatim? Neki će zatim okrenuti kartu s brojem 4, ali to uopće nije potrebno, jer pravilo će biti poštovano čak i ako je s druge strane suglasnik. Pravi je potez okrenuti kartu s brojem 7. Ako bi s druge strane bio samoglasnik, utvrdili bismo da pravilo nije poštovano.

Jedan pak drugi ne toliko apstraktan i vrlo konkretan problem gotovo svi ljudi znaju riješiti. Recimo da vi organizirate tulum na kojem ne biste željeli da se krši pravilo da maloljetnici ne smiju piti alkohol, pa zamolite sve uzvanike da na stol pored čaše stave osobne iskaznice. Za jednim stolom sjede četiri mladića kojima ne znamo dob. Za jednog od njih znamo da pije pivo, a za drugog sok. Njihove iskaznice položene su tako da ne vidimo dob. Ostala dvojica su okrenula iskaznice tako da se vidi da je jedan punoljetan, a drugi nije. No, ne znate piju li oni tonik ili votku. I tu je svima jasno što učiniti. Kod onog koji pije pivo okrenuti osobnu iskaznicu da se vidi dob, a kod onog kojem se vidi da je maloljetan pomirisati čašu.

Je li moguće da je ovdje riječ o potpuno analognom problemu? Jest, zapravo to je jedan te isti problem. Možemo povući usporedbe:

ima samoglasnik – pije alkohol
ima suglasnik – pije sok
ima paran broj – punoljetan je
ima neparan broj – maloljetan je.

Pravilo *alkohol smijete konzumirati samo ako ste punoljetni* adekvatno je pravilu *ako je na jednoj strani karte samoglasnik, na drugoj strani te karte nalazi se paran broj.* Dakle, s logičke je to strane potpuno isti problem. Zašto onda onaj prvi mnogi smatraju iznimno teškim, a drugi iznimno jednostavnim? Riječ je o tome da ljudi mnogo jednostavnije razmišljaju o poznatim objektima i prepoznatljivim situacijama, nego o potpuno apstraktnim objektima u neobičnim situacijama. Matematika se bavi upravo takvim objektima, bez obzira na to što su mnoge njene ideje nastale iz sasvim praktičnih problema i što mnoge te umotvorine imaju svoju primjenu.

Apstraktno razmišljanje

Samo je ljudski mozak sposoban razmišljati o apstraktnim pojmovima. Postoje četiri razine apstraktnog razmišljanja.

- Na prvoj razini možemo manipulirati u mislima stvarnim predmetima koje zamjećujemo u svojoj okolini. Ovdje nema nikakvog uopćavanja. Izgleda da su za ovo sposobne i neke životinjske vrste.
- Na drugoj razini možemo zamišljati stvarne objekte koje ne zamjećujemo u svojoj okolini. Toj razini su dorasli i neki primati.
- Na trećoj razini postoje u našim mislima objekti koje u stvarnom svijetu nikada nismo vidjeli. Riječ je o potpuno izmišljenim objektima koji mogu biti i kombinacije stvarnih objekata. Izgleda da su tomu dorasli samo ljudi.
- Četvrtu razinu apstraktnog razmišljanja čine potpuno apstraktni objekti koji nisu neposredno ili na jednostavan način povezani sa stvarnim predmetima. Ti su objekti nastali uopćavanjem. Uzmimo za primjer broj 3 koji kao takav ne postoji u stvarnosti. U stvarnom svijetu postoji skup jabuka, kamenčića, ljudi…, kojima smo mi uočili zajedničko svojstvo jednakobrojnosti.

Osvrnemo li se sada na Wasonov test, onda možemo lako zaključiti da zadatak o tulumu pripada trećoj razini apstraktnog razmišljanja, a onaj s kartama četvrtoj, mnogo zahtjevnijoj razini. Matematika se bavi apstraktnim pojmovima ili objektima koji imaju malo ili nimalo veze s objektima u realnom svijetu. Svaki problem uzdignut na četvrtu razinu apstraktnog razmišljanja zahtijeva daleko veći misaoni napor od nekog sličnog "opipljivog" problema.

Barbika kaže da je matematika teška

Kada je svojevremeno tvrtka *Mattel* koja proizvodi globalno popularnu lutkicu *Barbie* izbacila model lutke koji je izgovarao nekoliko rečenica, a između ostalih i rečenicu "Matematika je teška", cijela se matematička zajednica Sjedinjenih Američkih Država digla na noge. Svakako nije dobro da se djevojčice, koje se pretežito igraju s tom igračkom, obeshrabruje u učenju matematike, ali Barbie baš i nije bila u krivu, odnosno nisu u pravu oni koji su tvrdili da matematika nije teška već je samo drukčija. Evolucija nam je podarila mozak koji može, osim reakcije na osjetilne podražaje izvana, razmišljati *offline* o objektima ili predmetima koji im sliče. Britanski matematičar Keith Devlin, autor knjige Matematički gen, kaže:

"Za matematiku je potrebno *offline* razmišljanje o potpuno apstraktnim objektima koji uopće nisu povezani s bilo čime iz stvarnog svijeta. Naš mozak mora stvoriti obrasce djelovanja koji se razlikuju od posljedica osjetilnih podražaja. Znamo da su za to sposobni gotovo svi pripadnici ljudske vrste, budući da je upravo to preduvjet osjećaja za broj i svladavanja raznih apstraktnih značenja u modernom životu, poput pojmova braka, vlasništva ili zaduženosti. Ipak, najčešće nam se *offline* razmišljanje čini teškim. Sa subjektivnog stajališta, mozak novu apstrakciju prihvaća tako što je pokušava učiniti stvarnijom kroz upoznavanje koje proizlazi iz neposrednog dodira s apstraktnim pojmovima. A to zahtijeva naporan rad."

Sitna greška ili nerazumijevanje?

Bez stotina i stotina samostalno riješenih zadataka bilo u školi ili kod kuće teško je zamisliti napredak u matematici. Pod samostalno riješenim zadacima ne podrazumijevam one koji su tek prepisani s ploče, a niti one koje učenik rješava pod prevelikom kontrolom instruktora. A je li u današnje vrijeme naporan rad *u modi* prosudite sami? Kada se piše o tome kako mnogo gimnazijalaca odmah u prvom razredu mora posegnuti za instrukcijama iz matematike, onda se olako zaključuje kako je riječ o prezahtjevnom programu ili prestrogom profesoru. Iz dugogodišnjeg iskustva znam da problemi često leže u nerazumijevanju temeljnih matematičkih pojmova kao što je razlomak. Smatrate li pitanje je li zbroj $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ veći od 1 teškim pitanjem za gimnazijalca? Pa ipak, nemali broj njih neće moći brzo, pa čak ni točno odgovoriti na to pitanje. S druge strane, oni s istančanim osjećajem za razlomak, oni koji ga "vide" odmah će reći da je zbroj za $\frac{1}{6}$ veći od 1. Većina će radije umjesto razmišljanja posegnuti za pravilom i krenuti u zbrajanje po *špranci*. A, kako ono ide pravilo za zbrajanje razlomaka? Možda bolje da ovdje ne izričemo to složeno pravilo. Matematika je vrlo stroga u zahtjevu za poštovanjem pravila i simbola i to je još jedan razlog koji je čini teškom. Kako je takvih pravila jako mnogo, nemoguća je misija pamtiti ih bez dubinskog razumijevanja. Matematika bez razmišljanja o značenju svakog pojma postaje skup zamršenih i proizvoljnih pravila i simbola. Tako se lako dogodi greška da se pravilo pojednostavni i zbroji brojnik i brojnik, nazivnik i nazivnik, kako to ide kod množenja razlomaka, a ovdje je potpuno krivo. I tu se učenik i nastavnik često razilaze u procjeni učinjene pogreške. Dok je učenik smatra sitnom zabunom, nastavnik u pogrešci prepoznaje nerazumijevanje.

Matematičke sposobnosti

Ipak, neki učenici lakše od drugih svladavaju matematičko gradivo. Imaju li oni neke posebne sposobnosti? Koje sposobnosti uopće zahtijeva matematika? Za bavljenje matematikom potrebno je imati:

1. **Osjećaj za broj.** S tim osjećajem smo rođeni i njega iskazuju mala djeca, a i neke životinjske vrste.
2. **Sposobnost brojenja, razlikovanja i uspoređivanja brojčanih veličina.** Čimpanze se znatnim naporom može naučiti da broje do deset, a jedino čovjek može nastaviti brojčani niz u beskonačnost.

3. **Sposobnost računanja.** Čovjek je sposoban usvojiti algoritme kojima može izvoditi razne operacije s brojevima. Usvajanje nekih algoritama kao što je tablica množenja zahtijeva i naporno učenje napamet, ali i tu se dolazi do olakšanja ako razumijemo da je 9 puta 6 isto što i 6 x 9. Algoritmi se pojavljuju na svim razinama matematičkog obrazovanja, a danas ih olakšavaju kalkulatori. Ipak, znati tablicu množenja brojeva do 10 napamet je nužno. Neki učenici zbog nesigurnosti ili nedovoljne brzine s tablicom množenja imaju problema sa srednjoškolskom matematikom.
4. **Sposobnost apstraktnog razmišljanja.** Ljudski mozak razvija ovu sposobnost s usvajanjem jezika, a problem se javlja zbog nemogućnosti primjene te sposobnosti na matematička uopćavanja.
5. **Osjećaj za uzrok i posljedicu.** Ljudi su ovu sposobnost razvili vrlo rano. Na primjer, iako fizički slabiji od životinja znali su da ranjenu životinju treba pratiti jer su znali što slijedi. Kada su u pitanju apstraktni pojmovi, onda je situacija složenija.
6. **Sposobnost stvaranja i upravljanja uzročno-posljedičnim nizovima i činjenica i događaja.** Ovu sposobnost svakodnevno rabimo i unaprijed donosimo niz odluka. Bez ove sposobnosti nemoguće je izvesti neki matematički zadatak do kraja ili dokazati neku tvrdnju.
7. **Sposobnost logičkog razmišljanja.** Čovjek može korak po korak nizati logičke argumente i to je temelj matematičkog promišljanja.
8. **Sposobnost razmišljanja o odnosima među objektima.** Kao što postoje odnosi među objektima iz stvarnog svijeta, isto tako postoji i odnos među apstraktnim matematičkim objektima. Uočiti te odnose ključ je uspjeha u matematici.
9. **Sposobnost snalaženja u prostoru.** Da čovjek nema razvijenu ovu sposobnost, vjerojatno ne bi preživio kao vrsta. Ova sposobnost nije ključna samo za poimanje geometrije, nego pruža mogućnost da se i neki drugi matematički problemi smjeste u zorniji kontekst i riješe.

Mogu li oni koji misle da ne mogu?

Pri rješavanju običnog srednjoškolskog matematičkog zadatka najčešće se iskazuje potreba za kombinacijom nekoliko sposobnosti. Mi smo kao ljudi različiti pa se u razini posjedovanja tih sposobnosti razlikujemo. Postoje čak statistički dokazane i spolne razlike u nekim sposobnostima, ali one su zanemarive za svladavanje matematike. Golema je većina ljudi sposobna svladati elementarnu matematiku koja se uči u osnovnoj i srednjoj školi. Zašto onda mnogi ljudi smatraju da je matematika neshvatljiva? Keith Devlin sklon je zanimljivoj usporedbi:

"Kada u kuću uđemo prvi put, očekujemo da nam je sve neobično i nepoznato. No kad prošetamo kućom, prođemo kroz sobe i zavirimo u kuhinjske ormariće, brzo se prilagodimo. No, što ako u kuću ne možemo ući, a naše jedino znanje o njoj posljedica je promatranja nacrta i planova koje su rabili pri gradnji? Nadalje, što ako su ti nacrti i planovi pisani tehničkim jezikom koji smatramo zastrašujućim i neshvatljivim? Što ako, unatoč našim naporima, ne možemo oblikovati sliku kuće u svom umu? Tada nećemo moći osjetiti kako je živjeti u toj kući. Nećemo čak ni u mašti moći ući u kuću.

Zamjećujete razliku. Jednom kada uđete u kuću, ne morate biti posebno nadareni za kretanje kućom i upoznavanje soba. Ono što je teško i zahtijeva dodatne sposobnosti jest razumijevanje stručnih nacrta i planova gradnje. Siguran sam da većina ljudi na taj način shvaća matematiku. Suočeni su s brdom pravila, izrečenim nerazumljivim i besmislenim jezikom. Nije riječ o tome da ne razumiju matematiku, ***oni joj se nikad ni ne približe!*** Kad bi krenuli samo korak dalje od nacrta i ušli u kuću, bilo bi im jednostavno istraživati sobe tog matematičkog zdanja, baš poput šetnje pravom kućom."

Kada se dogodi da se neki učenik ili student mora ipak ozbiljnije pozabaviti nekim dijelom matematike iz bilo kojeg razloga, onda se događa da je prilično uspješan u tom dijelu matematike. Štoviše, tu osobu prestaju zanimati isključivo vanjski motivi kao što je ocjena, a postaje joj jako važno jesu li dobiveni rezultati točni zbog unutarnjeg zadovoljstva svojim radom. Svaki je nastavnik matematike doživio taj uspon kod mnogih učenika. To uvelike razbija stereotip da matematika mnogima ne ide. Uspjeh u redovnoj srednjoškolskoj matematici nije toliko u našim sposobnostima koliko u našim glavama da li to želimo. To možemo usporediti s trčanjem kada je u prošlom stoljeću ušlo u modu. Pokazalo se da čak i maraton mogu otrčati neprofesionalni sportaši ako su dovoljno ustrajni pri vježbanju.

Možda u tom svjetlu treba promatrati i uspjeh učenika naše škole (*Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile* Pazin) na nacionalnim ispitima i probnoj državnoj maturi. Ni po čemu se ne može zaključiti da je sposobnost naših učenika iznad prosjeka u državi. Dapače, u većim gradovima dolazi do oštrije selekcije pri upisu. Ovdje, je prije svega postojala jaka želja učenika i profesora da uspiju, a na školi je postojala atmosfera da se nadolazećim testovima pristupi vrlo ozbiljno. Kada se jednom učenik počne baviti matematikom i postizati uspjeh, matematika pruža dovoljno unutarnjeg zadovoljstva. Posljedica svega je bio pojačan interes učenika za matematička natjecanja i relativno dobri rezultati na njima.

Zanimljiv je i paradoks koji se javlja u učenju matematike. Više problema možete imati s elementarnom matematikom nego s višom, koja bi po prirodi stvari trebala biti teža. Ovo potvrđuju mnogi naši bivši učenici kada navrate u školu kao studenti i izjave da su matematiku položili brzo, s visokom ocjenom, čak boljom od one koju su imali u srednjoj školi. Često izjave kako im je ta viša matematika zanimljiva i da je sa zadovoljstvom svladavaju. I tu se može povući zgodna paralela s hodanjem kroz prirodu. Hodate li zaraslom dolinom, mučite se s mnogim preprekama na putu, a smjer puta se ne nazire. Kada se uzdignete, neki usponi mogu biti oštriji, ali imate dovoljno kondicije za svladati, vidite kuda idete, nazire se cilj kretanja i još ste nagrađeni s predivnim pogledom.

Svrha učenja matematike

Za nastavu je matematike pitanje gdje će nam to trebati pomalo nezgodno i teško pitanje. Iako je svijet koji nas okružuje tehnički vrlo sofisticiran, zapravo se sa svime možemo služiti, a da ne zavirujemo *ispod haube*. Baš kao što koristimo računalo, mobitel ili automobil. Mala djeca i prije nego krenu u školu već na računalu crtaju zakrivljene linije koristeći program *Paint*, a tek će u prvom razredu srednje škole naučiti kvadrat binoma i koordinatni sustav u ravnini s pomoću kojeg se model Bezierovih krivulja može objasniti. Danas lako dostupni GPS koristimo u automobilu, a da ni ne razmišljamo da se pozicija određuje s pomoću sjecišta hiperbola. Jednostavno strojevi to rade za nas, a mi njima upravljamo i bez nekog velikog znanja matematike. Naravno, ekipe ljudi koji su osmišljavali tehničke naprave više su ili manje rabili matematiku. Želja da budemo kreatori, a ne samo korisnici već može biti stimulativna za učenje matematike.

Današnji trend u obrazovanju jest steći praktična znanja koja nakon stjecanja diplome možemo primijeniti. U takvom okružju matematika gubi na važnosti. Međutim, nije rješenje u njenoj redukciji ili prenaglašavanju primjene matematike, nego njeno poučavanje u kontekstu širokog humanističkog pristupa u obrazovanju. Devlin će reći kako *obrazovanje nije uvježbavanje ljudi za određeni posao ili karijeru već prenošenje znanja i tisuća godina ljudske kulture s jedne generacije na drugu*.

Američko ministarstvo obrazovanja 1997. objavilo je *Bijeli dokument* koji je naglašavao važnost srednjoškolske nastave matematike za upisivanje željenog fakulteta i uspjeh na tržištu rada. Podaci nekoliko višegodišnjih istraživanja pokazuju da su studenti koji su u srednjoj školi slušali matematiku bili mnogo uspješniji i imali bolje ocjene od studenata koji nisu pohađali sate matematike u srednjoj školi. I to bez obzira na vrstu fakulteta. Izgleda da je dnevna doza matematičkog razmišljanja vrlo korisna za naš um, baš kao i rekreativno trčanje za naše tijelo.

LITERATURA

[1] P. Davis, R. Hersh, E. A. Marchisotto: *Doživljaj matematike*, Golden marketing, Zagreb 2004.

[2] Keith Devlin: *Matematički gen*, Algoritam, Zagreb 2008.

[3] Paul Dawkins: *How to Study Mathematics*, `http://tutorial.math.lamar.edu`