O problemu obrade grafova

funkcija i krivulja u nastavi četverogodišnjih srednjih škola

Milan Kabić, Zagreb

1. Uvod

U srednjoj školi, a osobito na višim i visokim školama, učenici i studenti susreću se sa zadacima u kojima je skiciranje grafova funkcija sastavni dio zadatka. Pritom se očekuje da samo skiciranje grafa, kao zorne pomoći u rješavanju, bude brz, lak i rutinski posao. Spomenimo samo nekoliko vrsta zadataka ili područja gdje je vještina skiciranja grafova nužna: grafičko rješavanje raznih nejednadžbi, određivanje broja rješenja jednadžbe, izračunavanje površine ravninskih likova i volumena rotacijskih tijela pomoću određenog integrala, višestruki i krivuljni integrali, numeričke metode za približno rješavanje jednadžbi itd.

Iako gimnazijalci i učenici tehničkih škola uče crtanje grafova svih osnovnih elementarnih funkcija i većine elementarnih funkcija, a pri obradi nekih primjera koriste i transformacije grafova (npr. $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$, $g(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + d$,...), praksa pokazuje da većini učenika i studenata čini nepremostivu prepreku skiciranje krivulja:

$$y = 1 - e^{|x|},\ y = 2|\sin x| - 1,\ y = \log_2\left(\frac{x}{2} - 1\right),$$

$$y^2 = 2x - 4y + 2, ...$$

Na nekim fakultetima ta se tema samo usput spomene, dok se na većini uopće ne obrađuje. Vjerojatno zato jer se tamo pretpostavlja da je obrađena u srednjoj školi.

Dakle, sama praksa nameće potrebu da se tema transformacije grafova temeljito obradi. Mislim da je to najpogodnije napraviti u četvrtom razredu u okviru poglavlja Funkcije, neposredno prije prelaska na limes funkcije. Za to je potrebno odvojiti nekoliko školskih sati. Najprije bi trebalo napraviti pregled i sistematizaciju elementarnih funkcija, ponoviti njihova svojstva i grafove, s naglaskom da učenici trebaju zapamtiti skiciranje grafova osnovnih elementarnih funkcija. Nakon toga bi se temeljito obradile transformacije grafova.

Graf funkcije

Definicija: Graf funkcije $f : D_f \to K_f$ je skup uređenih parova $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$. Za realne funkcije realne varijable uređene parove $(x, f(x))$ uobičajeno prikazujemo u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Zbog toga ćemo u daljnjem tekstu pod "grafom funkcije" podrazumijevati skup točaka $\{T(x, f(x)) : x \in D_f\}$.

2. Transformacije grafova funkcija i krivulja

Zadatak glasi: polazeći od grafa funkcije $f(x)$ koji znamo skicirati, treba nacrtati grafove funkcija:

1. $g(x) = af(bx + c) + d$ – linearna transformacija grafa,
2. $g(x) = f(|x|)$,
3. $g(x) = |f(x)|$.

Kod krivulja čije su jednadžbe implicitno zadane imamo isti zadatak: polazeći od poznate krivulje $F(x, y) = 0$, treba skicirati krivulju čija je jednadžba $G(x, y) = 0$, pri čemu je:

1. $G(x, y) = F(bx + c, ay + d)$,
2. $G(x, y) = F(|x|, y)$,
3. $G(x, y) = F(x, |y|)$.

Krivulje $y = g(x)$ i $G(x, y) = 0$ su transformacije krivulja $y = f(x)$, odnosno $F(x, y) = 0$.

Napomena: Svaku transformaciju grafa konkretne zadane funkcije možemo promatrati kao preslikavanje definirano preko koordinata točaka. Tako je linearna transformacija grafa funkcije $f(x)$ preslikavanje:

$$t_f : \Gamma_f \to \Gamma_g,\ \ T(x, f(x)) \to T'\left(\frac{x-c}{b},\ af(x) + d\right).$$

Kod modula imamo:

$$t_f : \Gamma_f \to \Gamma_g,\ \ T(x, f(x)) \to T'(x, f(|x|)),$$

odnosno $t_f : \Gamma_f \to \Gamma_g,\ \ T(x, f(x)) \to T'(x, |f(x)|)$.

Ako gledamo krivulje kao skupove točaka:

$$\mathrm{K} = \{T(x, y) : F(x, y) = 0\}$$

i

$$\mathrm{K}' = \{T(x, y) : F(bx + c, ay + d) = 0\},$$

onda je linearna transformacija krivulje K preslikavanje:

$$t_{\mathrm{K}} : \mathrm{K} \to \mathrm{K}',\ \ T(x, y) \to T'\left(\frac{x-c}{b}, \frac{y-d}{a}\right).$$

Kod modula imamo:

$$t_{\mathrm{K}} : \mathrm{K} \to \mathrm{K}',\ \ T(x, y) \to T'(|x|, y),$$

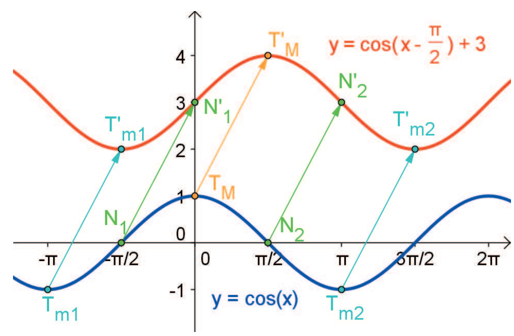
gdje je:

$$\mathrm{K}' = \{(x, y) : F(|x|, y) = 0\},$$

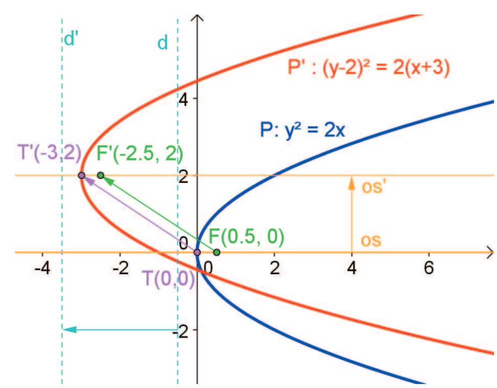
odnosno $t_{\mathrm{K}} : \mathrm{K} \to \mathrm{K}',\ \ T(x, y) \to T'(x, |y|)$,

$$\mathrm{K}' = \{(x, y) : F(x, |y|) = 0\}.$$

Gledano s geometrijskog aspekta, kod većine ovih transformacija, riječ je o preslikavanjima ravnine: translaciji, osnoj simetriji ili centralnoj simetriji. Uz njih imamo još kontrakciju ili dilataciju u smjeru koordinatnih osi. Ta nam činjenica olakšava praktičnu izvedbu zadatka. Pod pojmovima *karakteristične točke* i *karakteristični pravci* misli se na sljedeće: karakteristične točke su sjecišta ili dirališta s koordinatnim osima, točke ekstrema, tjemena, žarišta, središte konike ili neke povoljno odabrane točke grafa, a karakteristični pravci su asimptote, osi simetrije ili ravnalica. Transformacije se izvode po koracima. U prvom koraku preslikamo sve karakteristične točke i pravce. Nakon toga točke dobivene u prvom koraku povežemo glatkom linijom "imitirajući" početnu krivulju. Na slici 1.a) vidimo da su preslikavane nultočke i točke ekstrema kosinusoide. Kod parabole na slici 1.b), osim tjemena i fokusa, preslikani su još ravnalica i os simetrije.



a) Transformacija grafa kao preslikavanje $t_f : \Gamma_f \to \Gamma_g,\ T(x, \cos x) \to T'\left(x + \frac{\pi}{2}, \cos x + 3\right)$.



b) Transformacija krivulje kao preslikavanje $t_p : \mathrm{P} \to \mathrm{P}',\ (x, y) \to T'(x - 3, y)$.

Slika 1.

2.1. Linearna transformacija

Linearnu transformaciju grafa $g(x) = af(bx + c) + d$ razlučit ćemo na šest jednostavnijih slučajeva, tako što ćemo funkciju $g(x)$ rastaviti na "sastavne dijelove", tj. na jednostavnije funkcije.

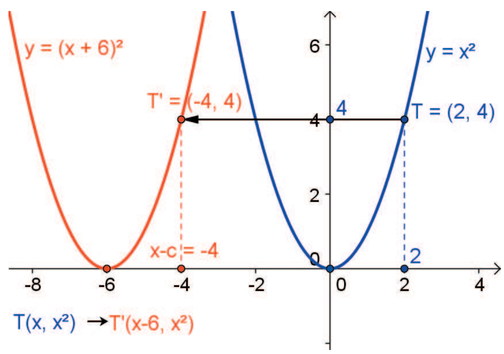
2.1.1. Translacija u smjeru x-osi

Ako je $a = b = 1$, $d = 0$ i $c \neq 0$, dobijemo funkciju $g(x) = f(x + c)$. Iako je graf funkcije $g(x)$ po definiciji skup $\Gamma_g = \{T'(x, g(x)) : x \in D_g\}$, za naše razmatranje povoljnije je uzeti da je:

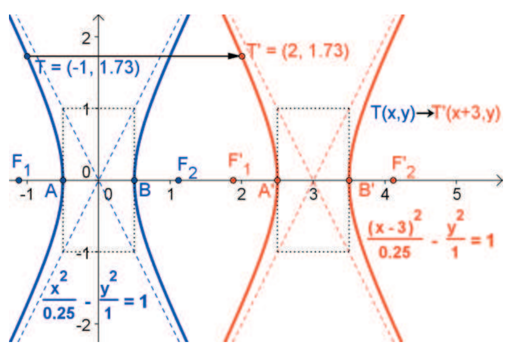
$$\Gamma_g = \{T'(x - c,\ f(x)) : x - c \in D_g\},$$

jer je $g(x - c) = f((x - c) + c) = f(x)$.

Graf funkcije $g(x) = f(x + c)$ dobiva se translacijom ili pomakom grafa funkcije $f(x)$ u smjeru x-osi za $|c|$. Ako je $c > 0$, graf se translatira ulijevo kao što je prikazano na slici 2.a). Kad je $c < 0$, krivulja se pomiče udesno (vidi sliku 2.b)).



a) $T(x, f(x)) \rightarrow T'(x - c, f(x))$. Graf funkcije $g(x) = (x + 6)^2$ nastao je translacijom parabole $y = x^2$, za 6 ulijevo.



b) $T(x, y) \rightarrow T'(x + 3, y)$. Translacija hiperbole za 3 udesno.

Slika 2.

Napomena: Da bi se izbjegla česta ponavljanja u daljnjem tekstu, ovdje ću naglasiti da sve tvrdnje koje se odnose na transformaciju $y = g(x)$ grafa $y = f(x)$ vrijede također i za transformaciju $G(x, y) = 0$ implicitno zadane krivulje $F(x, y) = 0$.

2.1.2. Translacija u smjeru y-osi

Ako je $a = b = 1$, $c = 0$ i $d \neq 0$, dobijemo $g(x) = f(x) + d$. Graf funkcije $g(x)$ je skup:

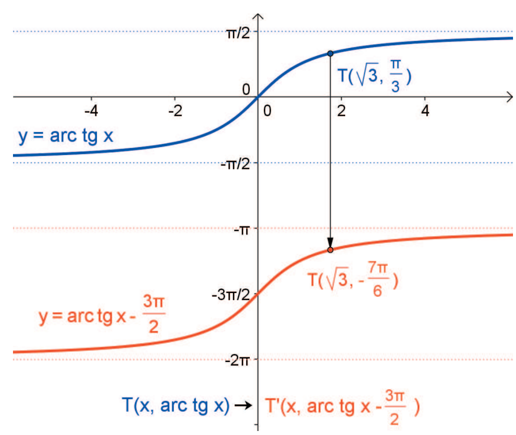
$$\Gamma_g = \{T'(x, f(x) + d) : x \in D_g\}.$$

Ako ordinati svake točke $T(x, f(x))$ pribrojimo d, dobivamo točke grafa funkcije $g(x)$.

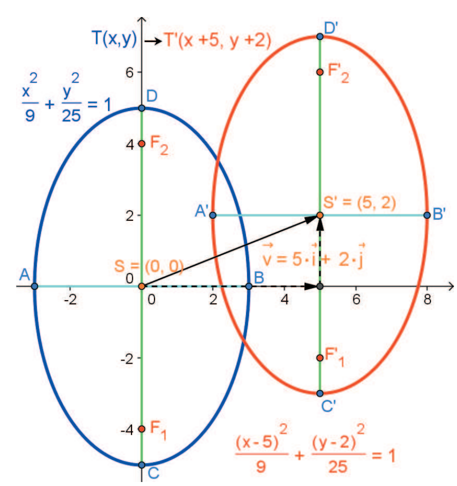
Graf funkcije $g(x) = f(x) + d$ dobiva se translacijom ili pomakom grafa funkcije $f(x)$ u smjeru y-osi za $|d|$. Ako je $d < 0$, graf se translatira prema dolje kao što je prikazano na slici 3.a). Kad je $d > 0$, krivulja se pomiče prema gore.

U jednadžbi $F(x, y + d) = 0$, implicitno zadane krivulje, koeficijent d je prešao na lijevu stranu znaka jednakosti pa imamo obrnutu situaciju: Ako je $d > 0$, krivulja se translatira prema dolje. Kad je $d < 0$, krivulja se pomiče prema gore.

Na slici 3.b) prikazana je kompozicija dviju translacija. Jedna je u smjeru x-osi, a druga u smjeru y-osi.



a) $T(x, f(x)) \rightarrow T'(x, f(x) + d)$. Graf funkcije $f(x) = \text{arc tg}\, x$, pomaknut je prema dolje za $\frac{3}{2}\pi$.



b) Translacija elipse za vektor $\vec{v} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$.

Slika 3.

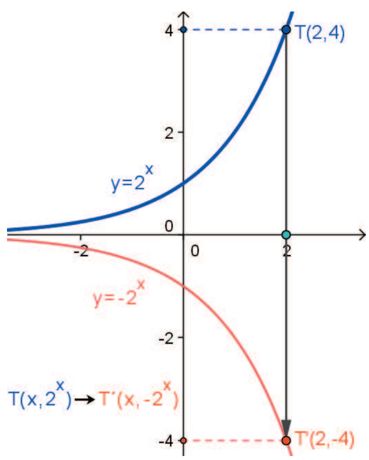
2.1.3. Zrcaljenje s obzirom na x-os

Za $a = -1$, $b = 1$, $c = d = 0$ imamo $g(x) = -f(x)$. Graf funkcije $g(x)$ je skup:

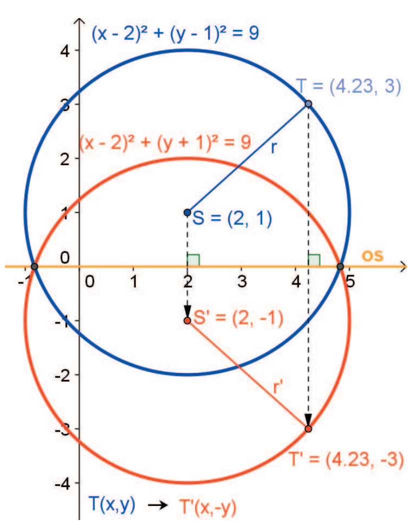
$$\Gamma_g = \{T'(x, -f(x)) : x \in D_g\}.$$

Točke $T(x, f(x))$ i $T' = (x, -f(x))$ razlikuju se samo u predznaku ordinata pa su osnosimetrične u odnosu na x-os.

Na slici 4.a) je primjer zrcaljenja grafa funkcije u odnosu na x-os, a na slici 4.b) zrcaljenje konike.



a) $T(x, f(x)) \to T'(x, -f(x))$. Graf funkcije $g(x) = -2^x$ dobije se zrcaljenjem grafa funkcije $f(x) = 2^x$ u odnosu na x-os.



b) Zrcaljenje kružnice u odnosu na x-os.

Slika 4.

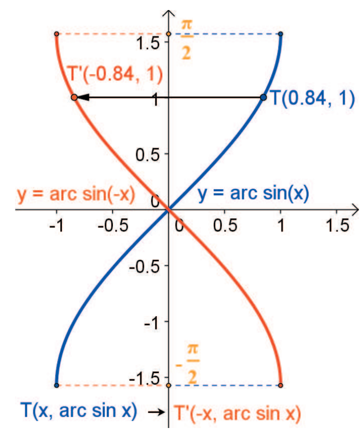
2.1.4. Zrcaljenje s obzirom na y-os

Za $a = 1$, $b = -1$ i $c = d = 0$, imamo $g(x) = f(-x)$. Graf funkcije $g(x)$ je skup:

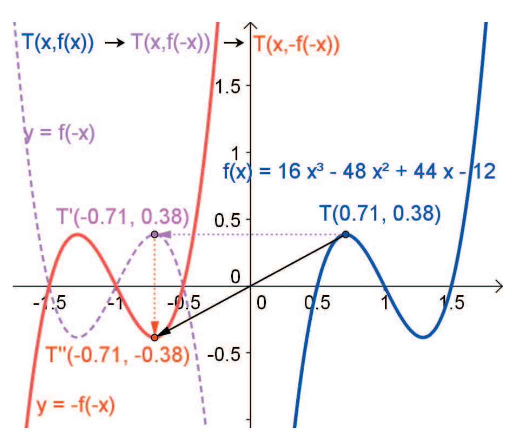
$$\Gamma_g = \{T'(x, f(-x)) : x \in D_g\} = \{T'(-x, f(x)) : -x \in D_g\}.$$

Točke $T = (x, f(x))$ i $T' = (-x, f(x))$ razlikuju se samo u predznaku apscisa pa su osnosimetrične u odnosu na y-os.

Na slici 5.a) je primjer osne simetrije grafa funkcije u odnosu na y-os. Na slici 5.b) prikazana je centralna simetrija u odnosu na ishodište kao kompozicija dviju osnih simetrija u odnosu na koordinatne osi.



a) $T(x, f(x)) \to T'(-x, f(x))$. Graf funkcije $g(x) = \arcsin(-x)$ nastao je zrcaljenjem grafa $y = \arcsin x$ u odnosu na y-os.



b) Kompozicija osne simetrije u odnosu na y-os i osne simetrije u odnosu na x-os je centralna simetrija s obzirom na ishodište.

Slika 5.

2.1.5. Rastezanje ili stezanje u smjeru y-osi

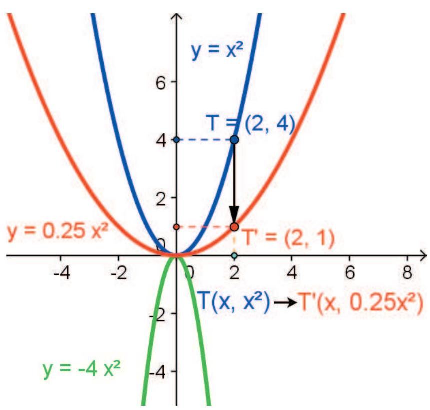
Za $b = 1$, $c = d = 0$ i $a \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ imamo $g(x) = af(x)$. Graf funkcije $g(x)$ je skup:

$$\Gamma_g = \{T'(x, af(x)) : x \in D_g\}.$$

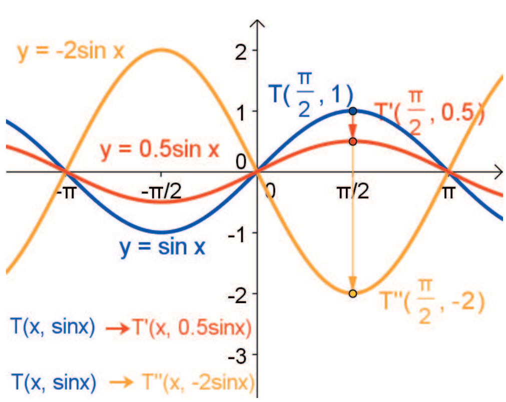
Graf funkcije $g(x) = af(x)$, nastaje dilatacijom (rastezanjem) grafa funkcije $f(x)$ a puta u smjeru y-osi ako je $a > 1$, odnosno njegovom kontrakcijom (stezanjem), ako je $0 < a < 1$.

Za $a < 0$ još dodatno imamo simetriju (zrcaljenje) u odnosu na x-os.

Utjecaj koeficijenta a bolje se vidi na primjeru sinusoide nego kod parabole. Na grafu kvadratne funkcije nije jasno je li deformacija nastala "stiskanjem" u smjeru y-osi ili širenjem u smjeru x-osi. S druge strane, na sinusoidi se vidi da nultočke nisu pomaknute, tj. da nema deformacije u smjeru x-osi (vidi slike 6.a) i 6.b)).



a) $T(x, f(x)) \rightarrow T'(x, af(x))$. Sa slike je vidljivo kako koeficijent a utječe na širinu parabole $y = ax^2$.



b) Kompozicijom rastezanja u smjeru y-osi i zrcaljenja u odnosu na x-os iz grafa funkcije $f(x) = \sin x$ dobije se graf funkcije $g(x) = -2 \sin x$.

Slika 6.

2.1.6. Rastezanje ili stezanje u smjeru x-osi

Za $a = 1$, $c = d = 0$ i $b \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ dobije se $g(x) = f(bx)$. Graf funkcije $g(x)$ je skup:

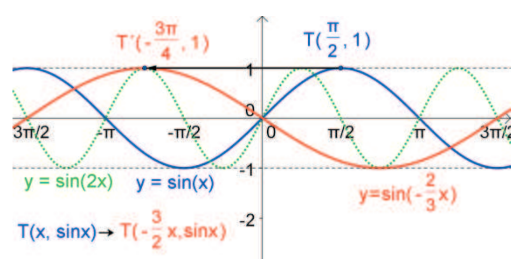
$$\Gamma_g = \{T'(x, f(bx)) : x \in D_g\}.$$

Za naše razmatranje povoljnije je uzeti da je:

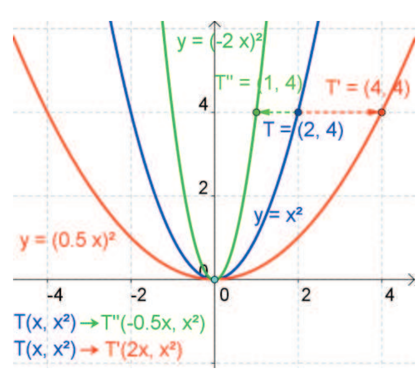
$$\Gamma_g = \left\{T'\left(\tfrac{x}{b}, f(x)\right) : \tfrac{x}{b} \in D_g\right\},$$

jer je $g\left(\frac{x}{b}\right) = f\left(b\frac{x}{b}\right) = f(x)$.

- Za b > 0 graf funkcije $g(x)$ nastaje dilatacijom (širenjem) grafa funkcije $f(x)$ u smjeru x-osi ako je $0 < b < 1$, odnosno njegovom kontrakcijom (suzivanjem), ako je $b > 1$.
- Za $b < 0$, još imamo dodatno simetriju (zrcaljenje) u odnosu na y-os.



a) $T(x, f(x)) \rightarrow T'\left(\frac{x}{b}, f(x)\right)$. Koeficijent b naziva se kružna frekvencija.



b) Stezanje i rastezanje parabole $y = x^2$ u smjeru x-osi.

Slika 7.

I ovdje vrijedi napomena da je djelovanje koeficijenta b lakše uočiti na primjeru sinusoide nego na grafu polinoma, što se lijepo vidi na slikama 7.a) i 7.b).

3. Graf funkcije $g(x) = f(|x|)$

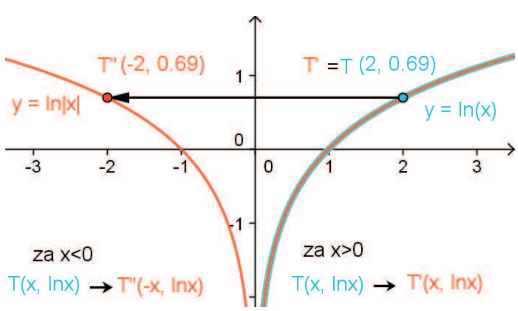
Graf funkcije $g(x)$ je skup:

$$\Gamma_g = \{T'(x,\ f(|x|)) : x \in D_g\}.$$

Funkcija $g(x)$ je parna pa joj je graf osnosimetričan u odnosu na y-os. Vrijedi da je:

$$g(x) = \begin{cases} f(x),\ za\ x \geq 0 \\ f(-x),\ za\ x \leq 0. \end{cases}$$

Onaj dio krivulje $y = f(x)$ koji se nalazi u lijevoj poluravnini obrišemo, a onaj dio koji se nalazi u desnoj poluravnini ostaje nepromijenjen. Taj dio zajedno sa svojom osnosimetričnom slikom u odnosu na y-os čini krivulju $y = f(|x|)$, kao što je prikazano na slici 8.



Slika 8. Grafovi funkcija $f(x) = \ln x$ i $g(x) = \ln |x|$.

4. Graf funkcije $g(x) = |f(x)|$

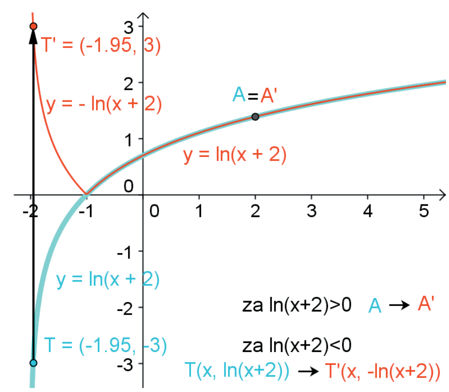
Graf funkcije $g(x)$ je skup:

$$\Gamma_g = \{T'(x,\ |f(x)|) : x \in D_g\}.$$

Vrijedi da je:

$$g(x) = \begin{cases} f(x),\ ako\ je\ f(x) \geq 0 \\ -f(x),\ ako\ je\ f(x) \leq 0. \end{cases}$$

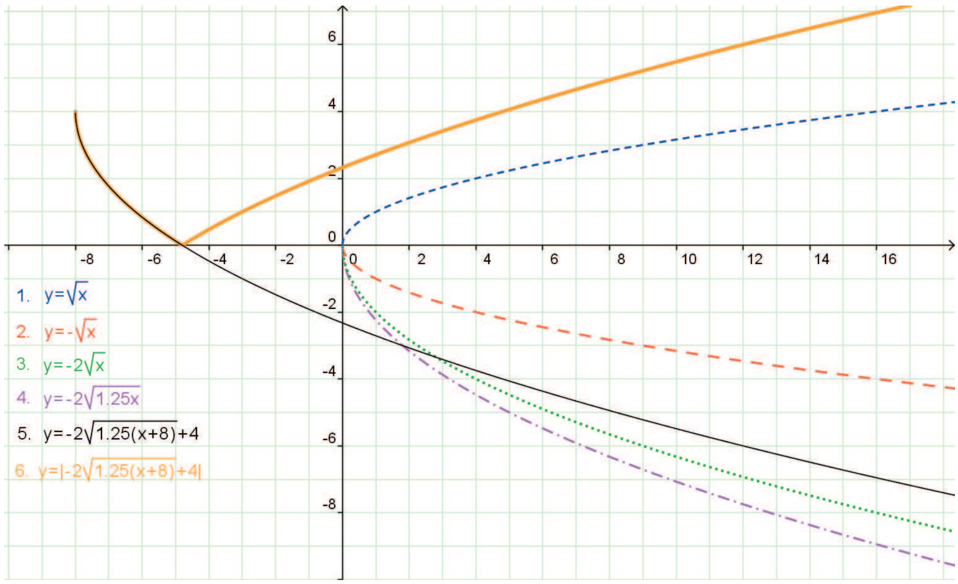
Ako dio krivulje $y = f(x)$ koji se nalazi ispod osi x zrcalimo u odnosu na x-os, a onaj dio koji je iznad x-osi ostaje nepromijenjen, dobit ćemo krivulju $y = |f(x)|$ (slika 9.).



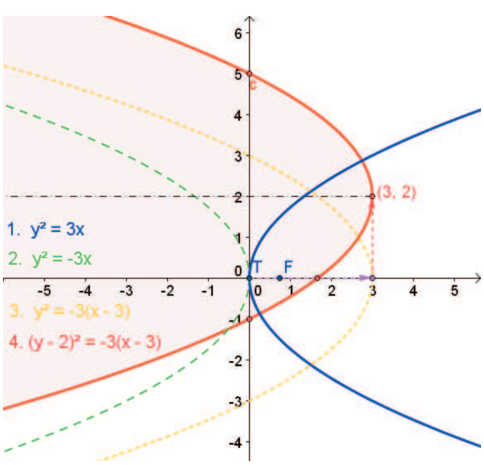
Slika 9. Grafovi funkcija $f(x) = \ln(x+2)$ i $g(x) = |\ln(x+2)|$.

PREGLED TRANSFORMACIJA GRAFOVA FUNKCIJA I KRIVULJA			
1.	$g(x) = f(x+c)$,	$G(x, y) = F(x+c, y)$	Translacija (pomak) u smjeru x-osi
2.	$g(x) = f(x) + d$,	$G(x, y) = F(x, y-d)$	Translacija (pomak) u smjeru y-osi
3.	$g(x) = -f(x)$,	$G(x, y) = F(x, -y)$	Zrcaljenje u odnosu na x-os
4.	$g(x) = f(-x)$,	$G(x, y) = F(-x, y)$	Zrcaljenje u odnosu na y-os
5.	$g(x) = af(x)$,	$G(x, y) = F(x, ay)$	Kontrakcija ili dilatacija u smjeru y-osi
6.	$g(x) = f(bx)$,	$G(x, y) = F(bx, y)$	Kontrakcija ili dilatacija u smjeru x-osi
7.	$g(x) = f(\|x\|)$,	$G(x, y) = F(\|x\|, y)$	Dio grafa funkcije $f(x)$ ili krivulje čije točke imaju pozitivne apscise ostaje nepromijenjen, a njegovim zrcaljenjem u odnosu na y-os dobije se dio grafa u lijevoj poluravnini
8.	$g(x) = \|f(x)\|$,	$G(x, y) = F(x, \|y\|)$	Zrcaljenje točaka negativnih ordinata u odnosu na x-os, a dio krivulje iznad x-osi ostaje nepromijenjen

Napomena: Sve ove transformacije grafa funkcije $f(x)$ možemo dobiti kao kompoziciju funkcije $f(x)$ s funkcijama: $g_1 = ax$, $g_2(x) = x + a$, ili $g_3(x) = |x|$.



Slika 10. Graf funkcija $f(x) = \left|-2\sqrt{1.25(x+8)}+4\right|$ nastao je kompozicijom pet osnovnih transformacija grafa.



Slika 11. Parabola $(y-2)^2 = -3(x-3)$ dobivena je iz parabole $y^2 = 3x$ kompozicijom triju transformacija: najprije zrcaljenjem u odnosu na y-os, pa translacijom za 3 u pozitivnom smjeru x-osi i na kraju translacijom za 2 u pozitivnom smjeru y-osi.

Učenici i studenti imaju i dodatni problem pri svladavanju grafova. Naime, osim manjkave teorijske podloge problem može predstavljati i nedovoljna zornost i dinamičnost kod crtanja grafova funkcija i krivulja. Zbog sporosti i nepreciznosti skiciranja grafova klasičnim načinom (ploča ili papir) neće se dogoditi željeni efekt: povezivanje jednadžbe funkcije ili krivulje s njihovim grafom. S jedne strane, učenik ili nastavnik trošit će previše energije u određivanju bitnih elemenata grafa i u njihovu crtanju, te neće dovoljno pozornosti posvetiti jednadžbi i njenim promjenama – dakle bitnim odnosima. S druge strane, mali broj grafova koji se mogu prikazati klasičnim metodama rada neće ponukati učenika da uoči i generalizira situaciju u kojoj promjena grafa utječe na promjenu jednadžbe i obratno. U tu svrhu može se koristiti računalo uz specijalizirane matematičke programe. Naravno, ono ne smije zamijeniti klasične metode poučavanja, ali će biti velika pomoć u nastavi. Računalo se pokazalo korisnim uz kombiniranu nastavu (klasične metode uz djelomičnu uporabu računala s projektorom) ili u samostalnom radu učenika uz nadzor nastavnika.

Na taj se način učenicima pruža prilika uložiti svoju energiju ne samo u izračunima elemenata grafa nego u uočavanju promjena i odnosa. Poučavanje se dinamizira i aktualizira. Ako se koristi s mjerom i promišljeno, računalo može biti od velike koristi upravo u obradi grafova funkcija i krivulja koji su dosad učenicima bili apstraktni i teže razumljivi.