GeoGebra 3.2 – više algebre
Matrice i determinante

Šime Šuljić, Pazin

U prošlom smo broju MiŠ-a opisali mogućnosti proračunske tablice i na primjerima opisali neke statističke naredbe nove verzije programa. Tim je primjerima obuhvaćen tek manji broj raspoloživih naredbi. Za potpuni pregled svih raspoloživih naredbi slobodno preuzmite upravo zgotovljeni službeni priručnik u PDF formatu, a koji ćete naći na adresi `http://www.geogebra.org/help/docuhr.pdf`. Ili pokrenite najnoviju verziju programa izravno s web stranice `www.geogebra.org` pod linkom *Nova verzija*, pa kliknite na izbornik *Pomoć* i otvorit će vam se online priručnik.

Nove naredbe za funkcije

Nekoliko novih naredbi koje se odnose na funkcije mogu olakšati rad s funkcijama, a osobito s polinomima. Naredba `Proširi` pomnožit će izraze u zagradama. Primjeri:

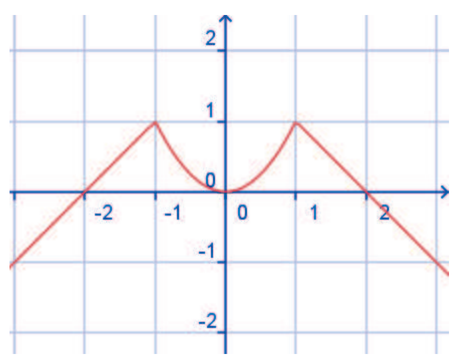
- `Proširi`[cos(x)*(1 – tan(x))] daje jednadžbu i crta graf funkcije $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$,
- `Proširi`[(x – 2)(x^2 + x + 1)(x + 3)] daje jednadžbu i graf funkcije $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$.
- Naredba `Pojednostavni` dat će neke jednadžbe u jednostavnijem obliku. Tako će:
- `Pojednostavni`[x + x + x] dati funkciju $f(x) = 3x$,
- `Pojednostavni`[sin(x) / cos(x)] dati funkciju $g(x) = \tan(x)$,
- `Pojednostavni`[(x^4 + 2x^3 – 4x^2 – 5x – 6) / (x + 3)] dati funkciju $h(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.

Naredba `Faktoriziraj` odnosi se samo na polinome. Tako će na primjer:

Faktoriziraj[$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$] prikazati u obliku $(x + x^2 + 1)(x - 2)(x + 3)$.

Funkcija zadana po dijelovima nije najnovija mogućnost, ali kako je to pomalo skrivena mogućnost koristim priliku da još jednom naglasim da se graf takvih funkcija crta uvjetnom naredbom. Primjeri:

- Ako[$x < -1, x + 2, x^2$] crta pravac za $x < -1$ i parabolu za $x > -1$,
- Naredba Ako[$x < -1, x + 2$, Ako[$x > 1, -x + 2, x^2$]] je ugniježđena uvjetna naredba koja daje graf prikazan na slici 1.



Slika 1

Ako želite prikazati graf funkcije samo na jednom ograničenom intervalu, učinite to naredbom: Funkcija[$x^2, -1, 2$] i dobit ćete parabolu na intervalu $[-1, 2]$.

Polinom određen točkama. Mogućnost da vam *GeoGebra* odredi i nacrta polinom n-tog stupnja na temelju $n + 1$ zadane točke postoji još od prethodne verzije programa, ali u službenom priručniku pomoći ta naredba nije bila dokumentirana.

Primjer. Zadane su točke $A(0, 3)$, $B(3, 0)$ i $C(5, 8)$. Odredite graf polinoma drugog stupnja koji prolazi tim točkama.

Jednostavna naredba Polinom[A, B, C] dat će jednadžbu i graf funkcije $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Neki korisnici izradili su ovu naredbu kao alat i prije nego je u *GeoGebru* službeno ugrađena ta naredba. Riječ je zapravo o školskom zadatku određivanja koeficijenata a, b i c nakon uvrštenja koordinata točaka u jednadžbu $f(x) = ax^2 + bx + c$ kvadratne funkcije. Poteškoća u izradi takvog alata sastojala se samo u predugačkom izrazu za koeficijente koji su bili rješenja sustava triju linearnih jednadžbi. Sada, kada nam je u *GeoGebri* na raspolaganju zapisivanje i računanje s matricama, problem određivanja polinoma drugog stupnja na temelju triju zadanih točaka može nam odlično poslužiti za upoznavanje s *GeoGebrinim* matričnim računom.

Matrice i determinante

Matrica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

u *GeoGebrinu* algebarskom prikazu prezentirana je na ovaj način:

```
{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}.
```

Dakle, kao lista čiji su elementi liste koje predstavljaju retke matrice. Liste su u *GeoGebri* skupovi objekata.

Operacije s matricama

Primjeri zbrajanja i oduzimanja:

- `matrica1 + matrica2`: zbraja odgovarajuće elemente dviju usklađenih matrica,
- `matrica1 - matrica2`: oduzima odgovarajuće elemente dviju usklađenih matrica.

Primjeri množenja:

- `matrica * broj`: množi svaki element matrice danim brojem,
- `matrica1 * matrica2`: koristi matrično množenje za izračunavanje matrice koja je rezultat množenja.

Napomena: Redci prve i stupci druge matrice moraju imati jednak broj elemenata.

Primjer: `{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}} * {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}}` dat će matricu `{{9, 12, 15}, {19, 26, 33}, {29, 40, 51}}`.

Matrične naredbe

- `Determinanta[matrica]`: izračunava determinantu dane matrice,
- `InverznaMatrica[matrica]`: daje inverznu matricu zadane matrice,
- `TransponiranaMatrica[matrica]`: daje transponiranu matricu zadane matrice.

Problem određivanja polinoma drugog stupnja

Ako su zadane točke A, B i C, problem određivanja funkcije oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$ čiji graf prolazi tim točkama svodi se na problem rješavanja sustava, odnosno određivanja nepoznanica a, b i c.

Sustav možemo prikazati i matrično:

$$\begin{bmatrix} x_A^2 & x_A & 1 \\ x_B^2 & x_B & 1 \\ x_C^2 & x_C & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_A \\ y_B \\ y_C \end{bmatrix}.$$

Kraće se može zapisati:

$$M \cdot K = Y.$$

Ako je D determinanta matrice M, a D_a, D_b i D_c diskriminante matrica u kojima je redom odgovarajući stupac zamijenjen vrijednošću matrice Y, onda su rješenja tog sustava:

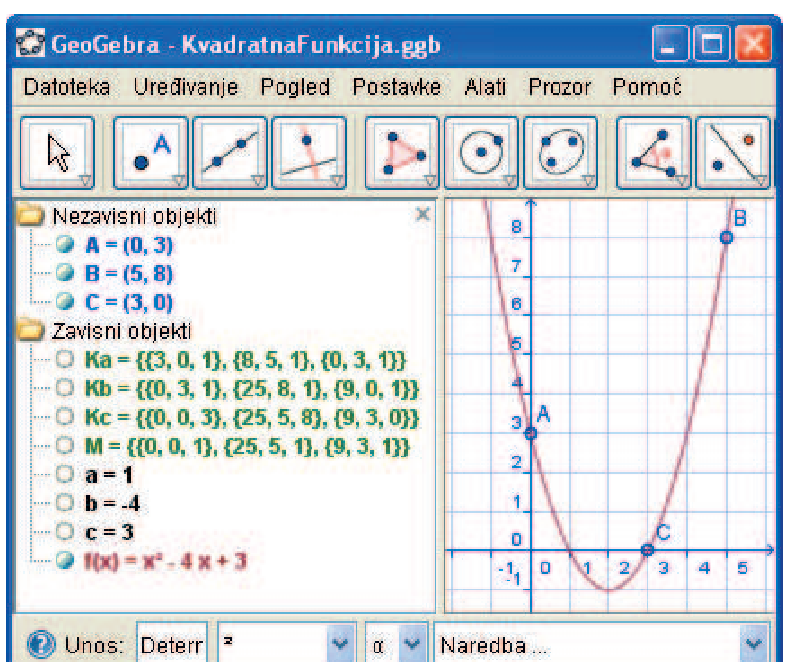
$$a = \frac{D_a}{D},\ b = \frac{D_b}{D} \text{ i } c = \frac{D_c}{D}.$$

Važno je imati na umu da u *GeoGebrinu* dinamičnom okružju problem rješavamo na općoj razini čak i kada polazimo od konkretnog slučaja, jer na taj način dobijemo alat koji rješava sve slične zadatke. Recimo ako su zadane točke $A(0, 3)$, $B(3, 0)$ i $C(5, 8)$, matricu M treba zadati kroz *traku za unos* na sljedeći način:

```
M = {{x(A)², x(A), 1}, {x(B)², x(B),
     1}, {x(C)², x(C), 1}}.
```

U algebarskom prozoru bit će prikazane njezine brojčane vrijednosti:

```
{{0, 0, 1}, {9, 3, 1}, {25, 5, 1}}.
```



Slika 2.

Te se vrijednosti mijenjaju kakogod pomičemo točke u grafičkom prikazu.

Alternativno, do iste se matrice može doći i kroz tablični prikaz (Ctrl + Shift + S). Tablicu popunimo kao na slici 3.

	A	B	C
1	= x(A)²	= x(A)	1
2	= x(B)²	= x(B)	1
3	= x(C)²	= x(C)	1

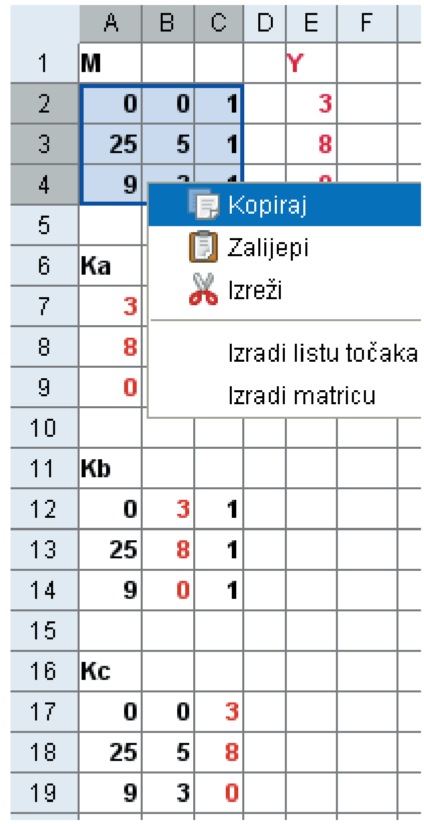
Slika 3

Zatim, označimo sve ćelije od A1 do C3 i desnim klikom aktiviramo skočni izbornik s naredbom *Izradi matricu*. Ovaj način upisa matrice na prvi pogled nije ništa brži. Međutim, potrebno je još dodati matrice K_a, K_b i K_c, a koje nastaju zamjenom jednog stupca matrice M vrijednostima ordinata zadanih točaka. U tom slučaju može se jednostavno koristiti naredbe *Kopiraj* – *Zalijepi* iz skočnog izbornika, što značajno ubrzava postupak.

Kroz *traku za unos* definiramo koeficijente kvadratne jednadžbe:

```
1. a = Determinanta[Ka] / Determinanta[M],
2. b = Determinanta[Kb] / Determinanta[M],
3. c = Determinanta[Kc] / Determinanta[M].
```

Potrebno je još zadati funkciju upisom jednadžbe $f(x) = ax^2 + bx + c$ u *traku za unos*. Obvezno napravite test povlačenja. Graf dobivene krivulje mora uvijek prolaziti zadanim točkama i nakon bilo kojeg pomaka tih točaka po koordinatnom sustavu (zaslonu računala).



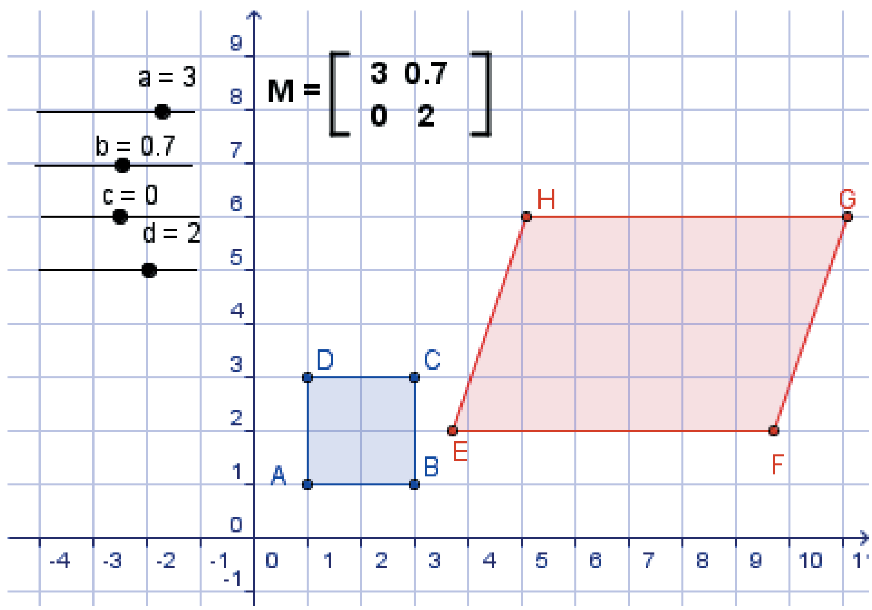
Slika 4

Matrične transformacije ravnine

U *GeoGebri* možemo množiti matricu dimenzije 2 x 2 s točkom ili vektorom i dobit ćemo točku kao rezultat. Primjer: `{{1, 2}, {3, 4}} * (3, 4)` daje točku $A = (11, 25)$.

Linearne transformacije ravnine su takva preslikavanja koja točki s koordinatama (x, y) pridružuju točku s koordinatama $(ax + by, cx + dy)$. Prikažite koeficijente linearnog preslikavanja kao klizače i definirajte matricu `M = {{a, b}, {c, d}}`. Konstruirajte kvadrat $ABCD$, a zatim sve vrhove preslikajte pomnoživši ih matricom M:

```
E = M*A, F = M*B, G = M*C, H = M*H.
```



Slika 5

Sada je pomicanjem klizača moguće istraživati utjecaj svakog pojedinog koeficijenta na preslikavanje. Moguće je tako otkriti kada dolazi do identičnog preslikavanja, kada do rastezanja ili sažimanja u smjeru pojedine osi i kada do rotacije. To će biti zornije ako u grafičkom prikazu ispišete matricu M pomoću alata za *Umetanje teksta*. Odaberite alat i kliknite na crtaću plohu, a u dijaloški okvir uključite LaTeX formulu i upišite:

```
“M = \left[\begin {array}{cc}” +
a + “&” + b + “\\” + c + “&” + d
+ “\end{array} \right]”.
```

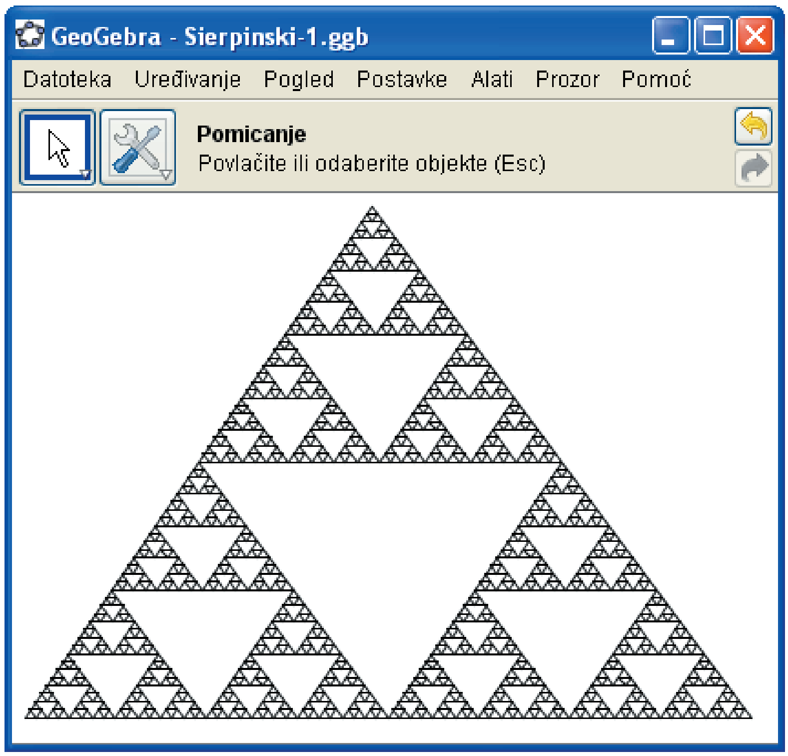
Afino preslikavanje ravnine je takvo preslikavanje koje točki s koordinatama (x, y) pridružuje točku s koordinatama $(ax + by + c, dx + ey + f)$. Za afino preslikavanje u *GeoGebri* se koristi matrica dimenzija 3 x 3:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Takvu je matricu moguće množiti s točkom za koju se podrazumijeva da ima homogene koordinate $(x, y, 1)$.

Trokut Sierpinskog

Fraktalna paprat, trokut Sierpinskog i još neki drugi fraktali nastaju sustavom iteriranih afinih funkcija. Trokut Sierpinskog se doduše može i čisto geometrijski konstruirati, ali mi ga nećemo konstruirati na taj način. Ako vas ipak zanima geometrijski pristup, preporučujem vam osobnu stranicu E. Petersona (`http://elishapeterson.wikidot.com`), mladog profesora na katedri za matematiku pri glasovitoj američkoj vojnoj akademiji *West Point*. Ondje ćete naći datoteku *Sierpinski-1.ggb* (slika 6.) s korisnički definiranim alatima za crtanje ovog fraktala i još mnoge vrlo zanimljive uratke u *GeoGebri*. Mi ipak krenimo putem dočaravanja uzastopnih preslikavanja točaka svjesni da u *GeoGebri* ne možemo izvesti nekoliko tisuća iteracija, koliko ih treba za kvalitetnu sliku. Naš cilj nije fraktal kao proizvod, za što postoji mnoštvo dobrih i besplatnih programa, nego razumijevanje matematičkog postupka koji dovodi do njega. Nije nam cilj ni napraviti računalni program u jednom od programskih jezika čime bi se sreli s problemima drukčije naravi, već želimo osjetiti po-



Slika 6

našanje matematičke ideje unutar malog "matematičkog laboratorija".

Trokut Sierpinskog sastoji se od svoje tri upola manje kopije. Radi jednostavnosti postavimo trokut u koordinatni sustav tako da mu vrhovi budu $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$ i $(0,\ 1)$. Prvo preslikavanje smanjuje trokut na pola. Njega možemo opisati simbolički kao $(x, y) \rightarrow (0.5x, 0.5y)$. Drugo preslikavanje smanjuje trokut na pola i pomiče ga za pola gore. Simbolički: $(x, y) \rightarrow (0.5x, 0.5y + 0.5)$. I treće preslikavanje smanjuje trokut na pola i pomiče ga za pola desno. Simbolički: $(x, y) \rightarrow (0.5x + 0.5, 0.5y)$. *GeoGebrine* matrice koje opisuju ta preslikavanja zapisujemo ovako:

```
M1 = {{0.5, 0, 0}, {0, 0.5, 0},
        {0, 0, 1}},
M2 = {{0.5, 0, 0}, {0, 0.5, 0.5},
        {0, 0, 1}},
M3 = {{0.5, 0, 0.5}, {0, 0.5, 0},
        {0, 0, 1}}.
```

Neka točka A pripada ranije definiranom trokutu. Nju ćemo preslikati po slučajno odabranom preslikavanju u točku A_1. Nju opet po istom načelu u točku A_2 i tako dalje. Za grube obrise slike bit će dovoljno šest ili sedam iteracija. Radi slučajnog odabira preslikavanja formirat ćemo listu matrica:

```
M = {M1, M2, M3}.
```

Niz iterativnih točaka dobije se naredbama:

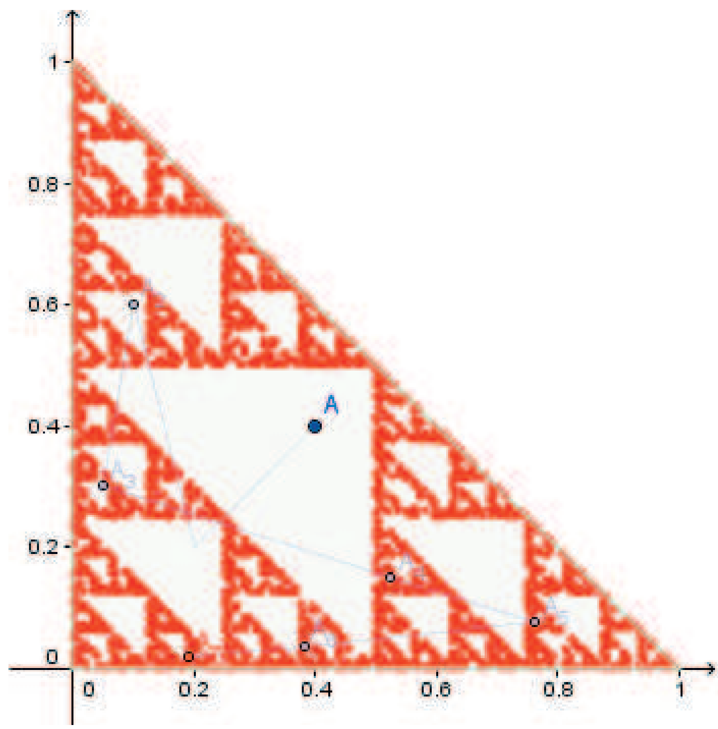
A_1 `= Element[M, 1 + floor(3 random())] A,`

A_2 `= Element[M, 1 + floor(3 random())]` A_1`,`

...

A_7 `= Element[M, 1 + floor(3 random())]` A_6`.`

Ovdje je s 1 + floor(3 random()) definirana slučajna funkcija koja daje vrijednosti $\{1,\ 2,\ 3\}$, pa naredba `Element` uzima prvu, drugu ili treću matri-



Slika 7

cu liste M i množi je s danom točkom. Posljednju točku u nizu uredimo posebnom bojom i uključimo puštanje traga. Sve što je potrebno sada činiti jest držati pritisnutu funkcijsku tipku F9, da program stalno preračunava nove slučajne vrijednosti, i pomicati unutar trokuta točku A. Na slici 7 vidi se rezultat nakon nekoliko minuta.

Online dodatak

Ovaj članak, osim svoje tiskane inačice, ima i svoj *online* dodatak. Na *GeoGebrinu* međunarodnom skladištu obrazovnih materijala (`http://www.geogebra.org/en/upload` mape `hrvatski` / `MiS` / `broj49`) naći ćete i njegovu PDF inačicu s aktivnim linkovima tako da se ne morate mučiti s podužim linkovima. Uz članak su i opisane *GeoGebrine* datoteke koje možete slobodno preuzeti i koristiti, promijeniti i doraditi, pa čak i na tom istom *skladištu* podijeliti s ostalim korisnicima. Ako ste vi osobno zadovoljni svojim uradcima, registrirajte se na *Skladištu* i podignite svoje radove.

Ako vam nešto u radu s *GeoGebrom* ne ide, odsad možete postaviti i pitanje na ***GeoGebrinu forumu*** (`http://www.geogebra.org/forum`), podforum ***Croatian***. Molim, bez ustručavanja. Nama je svako pitanje dobrodošlo i budite uvjereni da će još nekom osim vas biti korisno.

Današnja nam tehnologija omogućuje da iz svog doma pratite **audio-vizualnu** uputu za rad s *GeoGebrom*. Slijedite link `http://www.screencast.com/t/DnpG2tKY` i naučite kako napraviti tablicu otplate kredita, bilo da vam to treba za nastavu, osobne potrebe ili zato što volite doživljaj matematike u *GeoGebri*.