Transformacija formula

Antonija Horvatek, Ivanić Grad

Kako iz formula $P = a \cdot b$, $O = 2a + 2b$, $P = \frac{a \cdot b}{2}$, $P = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$ ... izvesti formule za a? Kako iz formula $v = \frac{s}{t}$, $s = s_0 + vt$, $Q = I \cdot t$ ... izvesti formule za t? Kako transformirati formule?

Trebamo li učenike naučiti općenitim postupcima ili vršiti transformacije samo u pojedinačnim slučajevima (kad nam se u gradivu takvi slučajevi pojave)? Bi li poučavanje općenitih postupaka spadalo u gradivo matematike ili fizike? U osnovnu ili u srednju školu? Kad su uopće učenici dovoljno zreli i kad imaju dovoljno predznanja da mogu shvatiti općenite postupke? Kako objasniti te postupke, odakle početi?

Vjerujem da se možemo složiti da bi bilo jako dobro kad bi učenici i samostalno znali (općenito) transformirati formule. (Nije li potreba za tim velika i u matematici i u fizici?) No, u našim programima nigdje nije navedeno kad bi to trebali naučiti, niti je u udžbenicima objašnjeno kako. Ipak, mnogi među nama očekuju od učenika da to znaju, zar ne?

Tijekom prošlih godina pokušala sam sedmaše poučiti tim postupcima. Budući da nigdje u literaturi nisam našla razradu tog sadržaja, odlučila sam u ovom članku opisati kako ga poučavam. Nadam se da će to sve nas (a pogotovo one koji sudjeluju u stvaranju programa) potaknuti ili na razmišljanje kako i gdje ubaciti taj sadržaj u program (pa da svi to počnemo sistematično raditi) ili na upute/prijedloge kako se nositi s problemom nedovoljne spretnosti učenika u transformiranju formula.

Kada početi?

U 7. razredu ili kasnije.

Naime, krajem 6. razreda poučava se rješavanje jednadžbi, pa se tada nauče postupci koji se koriste i prilikom transformacija formula, npr.

- ako se obje strane jednakosti pomnože ili podijele istim brojem, i dalje ćemo imati jednakost;
- ako se neki pribrojnik premjesti s jedne strane jednakosti na drugu, on će pritom promijeniti predznak i dr.

Krenuti na transformacije formula neposredno nakon cjeline "Rješavanje jednadžbi" bilo bi prerano jer učenici tada još uvijek nisu dovoljno uvježbani i vješti u svim tim postupcima, a uz to transformacije formula zahtijevaju i puno apstraktnije misaone postupke (u formuli nemamo kao u jednadžbi samo jedno *slovo*, već ih je više i stalno trebamo imati na umu koje od njih trebamo tretirati kao *nepoznanicu*, a koje kao poznate veličine).

Kako?

S transformacijama formula obično krenem na početku cjeline "Mnogokuti", jer je to prva geometrijska cjelina u 7. razredu u kojoj se (opet) pojavljuju formule. Na njih potrošim 3–4 školska sata. Uvježbavanje provodim u 4 koraka:

1) Krećem s formulama u kojima je samo operacija množenja, primjerice, $P = a \cdot b$.

   Postupak/uputstva:

   - Napiši zadanu formulu.
   - Veličina za koju se traži formula mora biti na lijevoj strani. Ako nije, zamijeni strane!
   - Veličina za koju se traži formula mora biti sama na lijevoj strani. Ako nije, riješi se onoga što *smeta* (a to u ovom slučaju znači – podijeli cijelu formulu s onim što *smeta* na lijevoj strani).

Navedeni postupak uvježbava se na formulama $P = a \cdot b$, $F = m \cdot a$, $P = a \cdot v_a$, $Ft = mv$, $O = 3a$, $V = abc$, $4x = 3ay$ ... (zadnja "formula" je izmišljena da bi se na njoj razmotrilo kako postupati u takvim složenijim slučajevima).

2) Nakon toga prelazim na formule u kojima su i razlomci (ali bez zbrajanja i oduzimanja).

   Postupak/uputstva:

   - Napiši zadanu formulu.
   - Ako su u toj formuli razlomci, cijelu formulu pomnoži sa zajedničkim nazivnikom (tj. riješi se razlomaka).
   - Veličina za koju se traži formula mora biti na lijevoj strani. Ako nije, zamijeni strane!
   - Riješi se onoga što *smeta* na lijevoj strani.

Navedeni postupak uvježbava se na formulama

$$a = \frac{v}{t},\quad I = \frac{U}{R},\quad P = \frac{a \cdot v_a}{2},\quad P = \frac{a \cdot b}{2},$$
$$V = \frac{B \cdot v}{3},\quad 4a = \frac{2c}{9d} \ldots$$

3) Nakon što su uvježbane transformacije iz gornjih slučajeva, prelazi se i na konkretne zadatke u kojima se to primjenjuje, npr.

   - Obujam kvadra je $V = 60\ \mathrm{cm}^3$, a duljine dvaju bridova su $a = 4\ \mathrm{cm}$ i $b = 3\ \mathrm{cm}$.

     Izračunaj duljinu trećeg brida c ako vrijedi formula $V = abc$.
   - Izračunaj visinu trokuta čija je površina $7.5\ \mathrm{cm}^2$, a duljina stranice $2\ \mathrm{cm}$.
   - Izračunaj t ako je $I = 40\ \mathrm{A}$, $Q = 80\ \mathrm{C}$ i vrijedi $I = \frac{Q}{t}$, itd.

4) Na kraju su još ostale formule u kojima su i zbrajanja/oduzimanja, npr. $O = 2a + 2b$. Postupak se u ovom slučaju svodi na već opisane postupke (gore) uz primjenu još jednog pravila koje je poznato od ranije, a to je: "Kad se neki pribrojnik *seli* s jedne strane jednadžbe na drugu, tada on promijeni predznak."

Formule na kojima se uvježbavaju transformacije su $O = a + 2b$, $O = 2a + 2b$, $s = s_0 + vt$, $P = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$ ...

Nakon toga...

Moje dosadašnje iskustvo pokazuje da je većina učenika 7. razreda u stanju svladati opisane postupke (a pogotovo prva tri koraka). Međutim, kao i sve drugo, i ovaj postupak mnogi učenici zaborave već nakon nekoliko tjedana. Da bi stečene vještine što dulje zadržali i još bolje savladali, unutar cjeline "Mnogokuti" pokušavam uklopiti što više zadataka u kojima se primjenjuju transformacije formula. Tako već nakon samog uvođenja pojma *mnogokuta* i osnovnih pojmova vezanih uz njega, te nakon uočavanja da i trokuti i četverokuti (koje smo dobro upoznali tijekom prethodnih godina) spadaju u mnogokute, počinju se rješavati složeniji zadatci tog gradiva. Radi se o zadatcima u kojima se koriste dvije formule (za opseg i površinu) – jedna u njezinom osnovnom obliku, a drugu treba transformirati. Radi se o zadacima primjerice:

- Jedna kateta pravokutnog trokuta duga je $3\ \mathrm{dm}$, hipotenuza je $5\ \mathrm{dm}$, a površina mu je $6\ \mathrm{dm}^2$. Koliki mu je opseg?
- Opseg paralelograma je $26.5\ \mathrm{dm}$, jedna stranica mu je $b = 6.1\ \mathrm{dm}$, a visina $v_a = 0.5\ \mathrm{m}$. Kolika mu je površina?
- Površina trapeza je $52.5\ \mathrm{cm}^2$, visina $6\ \mathrm{cm}$, kraci su mu dugi $7.5\ \mathrm{cm}$ i $10\ \mathrm{cm}$, a dulja osnovica $15\ \mathrm{cm}$. Koliki mu je opseg?

Nimalo trivijalno!

Ovdje još želim napomenuti da slabijim učenicima (kojima transformacije formula baš i ne idu) obično preporučim da umjesto transformiranja formula, u osnovnu formulu uvrste zadane brojeve te dobiveni izraz riješe kao jednadžbu i tako nađu traženu veličinu. Takav postupak se mnogima svidi i rado ga primjenjuju.

Transformacije formula napamet

Tijekom proteklih godina, nakon usvajanja pismenog postupka transformacija formula, pokušala sam učenicima objasniti kako će to učiniti napamet. Međutim, nije išlo.

Doduše, u formulama oblika $a = b \cdot c$ uspijevali su napamet izvesti formule za b i c (koristili su pravilo: “kad nešto iz množenja *selimo* na drugu stranu, tada to ide u nazivnik/dijeljenje”).

Ali, u formulama oblika $a = \frac{b}{c}$ učenici su teško mogli pratiti kako napamet izvesti formulu za c, tj. što se kamo i zašto seli, te zašto kod izvođenja formule za c nije dovoljno samo b premjestiti na drugu stranu, a kod izvođenja formule za b dovoljno je samo c prebaciti na drugu stranu. Pokušala sam im ukazati na to da veličine možemo seliti s jedne strane na drugu po dijagonalama (iz množenja/brojnika u nazivnik i obratno), ali to nisu mogli pratiti. Pismeni postupak su dobro razumjeli, ali napamet ne!

Transformacije formula prije 7. razreda

Naravno, neke formule mogu se transformirati i bez gore opisanih postupaka, koristeći samo razumijevanje računskih operacija, odnosno veza među njima. Tako je primjerice iz $P = a \cdot b$ lako izvesti $a = P : b$. Međutim, iz $O = 2a + 2b$ ili $P = \frac{a \cdot b}{2}$ učenicima nije nimalo lako izvesti formule za a.

Pa ipak, zbog HNOS-a se vrlo rano počne inzistirati na korištenju izvedenih formula. Već u 4. razredu, tek što učenici ugledaju prve formule, pojavljuju se i zadatci u kojima treba koristiti primjerice formulu $a = O : 3$, da bi se u 5. razredu otkrilo kako učenici ne razumiju ni sam pojam formule, ni kako (općenito) uvrstiti brojeve u nju, a imaju problema i s razumijevanjem pojma opsega, površine, mjernih jedinica za površinu (ma mnogi ne znaju ni koliko metar čega ima).

Slična inzistiranja na izvedenim formulama ponavljaju se u 5. razredu, da bi nas iznenadilo kako učenici 6. razreda ne razumiju ni ono najosnovnije.

Možda je to sve prebrzo? Možda bi se puno polakše i pedantnije trebali uvoditi osnovni pojmovi i operacije, te puno više vremena potrošiti na uvježbavanje istih, a nadgradnju ostaviti za kasnije? Ipak radimo u osnovnoj školi!

I na kraju...

Detaljan opis sati na kojima poučavam o transformiranju formula, s istaknutim pojedinostima koje učenicima predstavljaju probleme, te konkretne zadatke koji se rješavaju možete naći na mojim internetskim stranicama:

`http://public.carnet.hr/~ahorvate.`

Možda se neki među vama sad pitaju: “A odakle da uzmemo čak 6 sati (4 sata za transformacije + 2 sata za uvježbavanje na trokutima i četverokutima) za gradivo koje nam niti nije u programu?”

Nažalost, nemam pametan odgovor na to pitanje. Meni u nastavi stalno nedostaje vremena! Puno toga u programu nije navedeno, a znam da će učenicima u daljnjem školovanju trebati, pa se trudim i to odraditi. Naravno, ako tako radim, ne mogu baš sve odraditi detaljno. Pri odlučivanju gdje skratiti, pokušavam procijeniti što će učenicima više trebati, a što je možda manje važno. No, nisam u potpunosti zadovoljna ni takvim skraćivanjem.

Već se godinama pitam zašto nam je program tako prenatrpan i zašto sam stalno prisiljena tako raditi. S jedne strane osjećam potrebu da se dulje zadržim na osnovnim stvarima (jer radim s učenicima kojima to nije samo od sebe jasno ni lako), a s druge strane znam da moram obraditi i sve ono što će se na višem stupnju školovanja podrazumijevati da znaju. Sve to “povezati u jednu glatku priču” jednostavno nije moguće jer vrijeme leti, leti... iz sata u sat... iz godine u godinu...