

Matematičareva jadikovka

2. dio



Paul Lockhart, New York, SAD

Kurikulum matematike

U načinu poučavanja matematike u školi žalosno je da se na satima matematike u stvari ne bavimo pravom matematikom, no još je žalosnije ono čime se bavimo: zbunjujućom gomilom razornih dezinformacija poznatom pod nazivom "matematički kurikulum". Vrijeme je da pobliže pogledamo s čime se točno naši učenici suočavaju – čemu su izloženi u ime matematike i kako im se šteti u tom procesu.

Najuočljivija osobina tog takozvanog matematičkog kurikuluma je njegova krutost. To je posebno uočljivo u višim razredima. Od škole do škole, od grada do grada i od države do države govore se i rade iste stvari na isti način i točno istim redoslijedom. Većina ljudi jednostavno je prihvatila taj "standardni model" matematičkog kurikuluma kao sinonim za samu matematiku, i uopće ih ne uznemiruje niti brine to orvelojansko stanje stvari.

To je usko povezano s onim što ja nazivam "mit o ljestvama" – idejom da se matematika može urediti kao niz "predmeta", a svaki je na neki način napredniji ili "viši" od prethodnog. Posljedica toga je pretvaranje školske matematike u *utrku* – neki učenici su "ispred" ostalih, a roditelji su zabrinuti kad njihovo dijete "zaostaje". A kamo nas ta utrka vodi? Što nas čeka u ciljnoj liniji? To je jedna utrka koja ne vodi nikamo. Na kraju ste izigrani, bez matematičkog obrazovanja, a da to čak ni ne znate.

Prava matematika nije gotov proizvod – ne postoji nešto poput Algebra II *ideje*. Problemi vas sami vode i ne znate unaprijed kamo će vas odvesti. *Umjetnost nije utrka*. Mit o ljestvama je pogrešna slika predmeta, a učiteljjev osobni prolazak kroz standardni kurikulum osnažuje taj mit i sprječava ga da vidi matematiku kao organsku cjelinu. Kao rezultat imamo matematički kurikulum bez povijesne perspektive i međusobne povezanosti, rascjepkanu zbirku izmiješanih tema i tehnika, povezanih jedino lakoćom kojom se mogu svesti na korak-po-korak postupke.

Umjesto otkrivanja i istraživanja imamo pravila i propise. Nikad ne čujemo učenika da kaže: "baš sam htio vidjeti ima li ikakvog smisla potencirati broj negativnim brojem i otkrio sam da dobiješ stvarno zgodan obrazac odabereš li recipročan broj". Umjesto toga postoje učitelji i udžbenici koji objasne "pravilo s negativnim eksponentom" kao *fait d'accompli* (gotovu činjenicu), bez spominjanja ljepote koja se skriva iza tog izbora, ili čak ne kažu da je to uopće izbor.

Umjesto smislenih problema koji mogu dovesti do sinteze različitih ideja, do nezacrtnih područja rasprava i debata, i do osjećaja tematskog jedinstva i harmonije u matematici, imamo dosadne i suvišne vježbe, svojstvene tehnikama umjesto raspravi, koje su zbog toga odspojene i međusobno i od matematike kao cjeline, pa ni učenici ni učitelji nemaju pojma kako ili zašto se takva stvar uopće mogla pojaviti.

Umjesto prirodnog okruženja nekog problema u kojem mogu donositi odluke o tome što žele da njihove riječi znače, koje pojmove žele šifrirati, učenici su podvrgnuti beskrajnom nizu nemotivirajućih a priori "definicija". Kurikulum je opsjednut žargonom i nazivljem, čini se s jedinom svrhom da učiteljima osigura nešto po čemu će ispitivati učenike. Niti jedan matematičar na svijetu neće se zamarati čineći besmisleno razlikovanje: $2\frac{1}{2}$ "je 'mješoviti' razlomak, dok je $5/2$ 'nepravi' razlomak". Ma, oni su jednaki! To su isti brojevi koji imaju ista svojstva. Tko koristi takve riječi izvan četvrtog razreda?

Naravno, lakše je provjeriti nečije poznavanje neke besmislene definicije nego nadahnuti ga da stvori nešto lijepo i pronađe svoj vlastiti smisao. Čak ako se i složimo da je osnovni i uobičajen matematički rječnik važan, ovo nije taj slučaj. Žalosno je da petaše učimo da kažu "*quadrilatera*" (pravokutnik) umjesto "četverostrani lik", ali im nikad ne damo povoda da koriste riječi poput "pretpostavka" i "protuprimjer". Srednjoškolci moraju naučiti rabiti funkciju sekans, $\sec x$, kao skraćenicu za funkciju recipročnu kosinusu, $1/\cos x$, (definiciju intelektualne težine jednake težini odluke hoćemo li rabiti "&" umjesto "and"). To što je ta skraćunica, preuzeta iz naučičkih tabela iz 15. stoljeća, još uvijek u uporabi (dok su ostale, poput funkcije *versinus*, izumrle), više je povijesna nesreća i sasvim je bezvrijedna u eri kada brzi i precizni brodski izračuni više ne predstavljaju problem. Na taj se način u nastavi matematike razbacujemo besmislenim nazivljem koje je samo sebi svrha.

U praksi, kurikulum čak nije niti niz tema ili ideja, to je niz simbola. Matematika se očito sastoji od skrivenog popisa tajanstvenih simbola i od pravila za baratanje njima. Maloj djeci se daju '+' i '+-'. Tek kasnije im se može povjeriti '√', a onda x i y te alkemija zagrada. Naposljetku, indoktrinira ih se korištenjem simbola 'sin', 'log', ' $f(x)$ ', te, ako se pokažu dostojnima, ' d ' i ' f '. A pritom ne dožive ni jedno značajnije matematičko iskustvo.

Taj program je tako čvrsto utvrđen da učitelji i autori udžbenika mogu pouzdano predvidjeti, godinama unaprijed, što će točno učenici raditi, i to za svaku pojedinu stranicu vježbi. Nije neobično da se od učenika 2. razreda srednje škole traži da izračunaju $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ za različite funkcije f , zato da bi mogli to "prepoznati" kasnije, kad budu radili račun par godina kasnije. Naravno, nikakvo objašnjenje zašto bi takva, naizgled proizvoljna kombinacija operacija bila zanimljiva, nije im dano (niti se to očekuje), premda sam siguran da postoje mnogi učitelji koji pokušavaju objasniti što bi takva

stvar mogla značiti, misleći da učeniku čine veliku uslugu, a to je njima u stvari samo još jedan dosadan zadatak preko kojeg trebaju prijeći. "Što žele da napravim? Oh, samo uvrstiti? OK."

Još jedan loš primjer je kad poučavamo učenike da neki podatak izraze u nepotrebno kompliciranom obliku, samo zbog toga što će to u nekoj daljoj budućnosti imati značenje.

Imaju li srednjoškolski nastavnici blagog pojma o tome zašto traže od učenika da preoblikuju "broj x leži između tri i sedam" u $|x - 5| < 2$? Zar ti beznadno nesposobni autori udžbenika zaista vjeruju kako pomažu učenicima pripremajući ih za krajnji mogući dan, godinama udaljen, kad bi se oni možda bavili višedimenzionalnom geometrijom ili nekim apstraktnim metričkim prostorom? Sumnjam. Pretpostavljam da oni jednostavno kopiraju jedan drugoga desetljeće za desetljećem, možda mijenjajući font ili boje označavanja, zračeci ponosom ako školski sustav prihvati njihovu knjigu, i time nehotice postaju njegovi suučesnici.

Matematika se bavi problemima i problemi moraju biti žarište učenikova matematičkog života. Koliko god bilo bolno i kreativno frustrirajuće, kao što to samo može biti, učenici i nastavnici bi morali u svakom trenutku biti uključeni u proces – imati ideje, nemati ideje, otkrivati uzorke, iznositi pretpostavke, konstruirati primjere i protuprimjere, smišljati argumente i međusobno kritizirati svoje radove. Iz tog će procesa prirodno proizaći tehnike i metode, kao što su dolazile kroz povijest: ne izolirane, već životno povezane, te kao mladice izrasle iz problemskog okvira.

Nastavnici engleskog jezika znaju da se pisanje riječi i izgovor najbolje uče u sklopu čitanja i pisanja. Nastavnici povijesti znaju da su imena i datumi nezanimljivi ako ih se izvuče iz konteksta uzročno-posljedičnog slijeda događaja. Zašto je matematičko obrazovanje ostalo zaglavljeno u 19. stoljeću? Usporedite svoje vlastito iskustvo učenja algebre s prisjećanjem Bertranda Russella:

"Morao sam učiti napamet: Kvadrat zbroja dvaju brojeva jednak je zbroju njihovih kvadrata uvećanom za njihov dvostruki umnožak. Nisam imao blage veze što to znači, a kad nisam mogao zapamtiti riječi, učitelj bi mi bacio knjigu u glavu, što ni na koji način nije stimuliralo moj um."

Je li danas bitno drukčije?

SIMPLICIO: Mislim da to nije sasvim pošteno. Sigurno su otad metode učenja unaprijeđene.

SALVIATI: Misliš, metode *vježbanja*. Poučavanje je složeno međuljudski odnos, ono ne treba metode. Odnosno, radije bih rekao, trebao li metode, vjerojatno nisi dobar učitelj. Nemaš li osjećaja za svoj predmet toliko da možeš svojim riječima, spontano i na prirodan način pričati o tome, koliko ga dobro uopće razumiješ? A, govoreći o zaglavljivanju u devetnaestom stoljeću, nije li šokantno to što je sam kurikulum zaglavio u sedamnaestom? Kad samo pomislim na zadivljujuća otkrića i na apsolutnu revoluciju matematičkih misli koja se dogodila u posljednja tri stoljeća! O njima nema niti spomena, kao da se nikad nisu ni dogodila!

SIMPLICIO: Ali, ne tražiš li previše od naših nastavnika matematike? Očekuješ od njih da svakom od nekoliko desetaka učenika posvete posebnu pažnju, vodeći svakog od njih po vlastitom putu otkrivanja i prosvjetljenja, i još da budu u tijeku s novijom matematičkom povijesti?

SALVIATI: Očekuješ li od svog nastavnika likovnog odgoja da bude sposoban pružiti ti individualizirani, značaki savjet o tvojim slikanju? Ne očekuješ li od njega da zna barem nešto iz povijesti umjetnosti u posljednja tri stoljeća? Ali, ozbiljno, ja ne očekujem ništa takvoga, samo bih želio da je tako.

SIMPLICIO: Ti dakle kriviš učitelje matematike?

SALVIATI: Ne, ja krivim društvo koje ih stvara. Jadni vragovi trude se najviše što mogu, radeći samo ono što su naučili. Siguran sam da većina njih voli svoje učenike i mrzi to čemu su ih prisiljeni izložiti. Duboko u sebi, oni znaju da je to besmisleno i degradirajuće. Osjećaju da su od njih napravili zupčanike u velikom stroju za uništavanje duha, ali nedostaje im perspektiva potrebna da to shvate, i da se protiv toga bore. Oni samo znaju da "moraju spremiti učenike za sljedeću godinu".

SIMPLICIO: Zar zaista misliš da je većina učenika sposobna raditi na tako visokom nivou i kreirati svoju vlastitu matematiku?

SALVIATI: Ako iskreno mislimo da je kreativno zaključivanje za naše učenike "preuzvišeno", da oni nisu sposobni za to, zašto im onda dopuštamo da pišu povijesne referate ili eseje o Shakespeareu? Problem nije u tome što učenici ne bi bili sposobni kreativno zaključivati, već u tome što nitko od učitelja nije sposoban. Oni nikada ništa nisu sami dokazali, pa kako bi mogli savjetovati učenike? U svakom slučaju, sigurno bi postojao određen raspon interesa i sposobnosti, kao što postoji

u svakom predmetu, no učenici bi barem voljeli ili mrzili matematiku zbog onog što ona stvarno jest, a ne zbog ovog izopačenog rugla koje je postala.

SIMPLICIO: Ali, sigurno želimo da svi naši učenici nauče osnovne činjenice i vještine. Tome služi kurikulum i zato je on tako nepromjenjiv – postoje određene bezvremenske, čvrste činjenice koje učenici trebaju znati: jedan i jedan su dva, zbroj kutova u trokutu je 180 stupnjeva. To nisu nečija mišljenja, nečiji sladunjavi umjetnički osjećaji.

SALVIATI: Upravo suprotno. Matematička građa, korisna ili ne, otkriva se i razvija u kontekstu nekog problema, i svoje značenje vuče iz tog konteksta. Ponekad želimo da jedan i jedan bude nula (kao u tzv. 'mod 2' aritmetici), a na površini sfere kutovi trokuta mogu imati i više od 180 stupnjeva. Nema "činjenica" samih po sebi, sve je relativno i u međusobnom odnosu. Bitna je čitava priča, ne samo njezin kraj.

SIMPLICIO: Umoran sam već od tog tvog misterioznog naklapanja! Uzmi pimjerice osnovnu aritmetiku, u redu? Slažeš li se ti ili ne s tim da bi je učenici morali naučiti?

SALVIATI: To ovisi o tome što misliš kad kažeš "je". Misliš li na razumijevanje računskih problema i uređaja u skupu brojeva, na uvažavanje prednosti grupiranja i imenovanja, na prepoznavanje razlike između same stvari i njezinog prikaza, te na neku ideju o povijesnom razvoju brojevni sustava – onda da, mislim da takvim stvarima naši učenici moraju biti izloženi. Misliš li na učenje napamet aritmetičkih činjenica bez pojmovnog okvira u pozadini, onda ne. Misliš li na istraživanje nimalo očigledne činjenice da je pet skupina od sedam isto što i sedam skupina od pet, onda da. Misliš li na stvaranje pravila da je $5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$, onda ne. Raditi matematiku uvijek bi trebalo značiti otkrivati uzorke i iznjediti prekrasna i smisljena objašnjenja.

SIMPLICIO: Što je s geometrijom? Ne dokazuju li učenici tamo razne stvari? Nije li srednjoškolska geometrija savršeni primjer nastave matematike kakvu želiš?

Srednjoškolska geometrija: vražje sredstvo

Za autora oštre optužnice nema ničeg iritantnijeg nego kad mu se glavni predmet optužbe ponudi u njegovu obranu. Nikada vuk u janjećoj koži nije bio tako podmuкао, niti lažni prijatelj tako opasan kao što je srednjoškolska geometrija. *Upravo je taj* školski pokušaj da uvede učenike u umjetnost rasprave čini toliko opasnom.

Prikazujući se kao arena u kojoj će se učenici napokon baviti pravim matematičkim razmišljanjem, taj virus napada matematiku ravno u srce, uništavajući samu srž kreativne razumne rasprave, kvareći uživanje u tom očaravajućem i prekrasnom predmetu, trajno ih onesposobljavajući za razmišljanje o matematici na prirodan i intuitivan način.

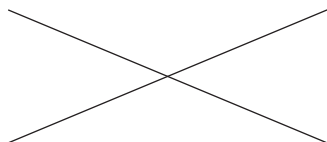
Čitav mehanizam koji stoji iza toga je vrlo suptilan i lukav. Učenik–žrtva najprije je iznenađen i paraliziran navalom besmislenih definicija, propozicija i nazivlja, a zatim ga se polako i pažljivo udaljava od svake prirodne radoznalosti ili intuicije o oblicima i njihovim uzorcima i to sustavnom preobraćanjem na neprirodan jezik i umjetni oblik takozvanog “propisanog geometrijskog dokaza”.

Metafore na stranu – nastava geometrije je mentalno i emocionalno daleko najrazorniji dio čitavog K-12 matematičkog kurikuluma. Ostali sati matematike mogu sakriti prekrasnu pticu, ili je zatvoriti u kletku, ali je na satima geometrije otvoreno i okrutno muče. (Izgleda da ipak ne mogu bez metafora.)

Učenička intuicija se sustavno potkopava. Dokaz, odnosno matematička rasprava, djelo je mašte, to je pjesma. Njezin cilj je *zadovoljiti*. Lijepi dokaz trebao bi objasniti, trebao bi objasniti jasno, duboko i elegantno. Dobro osmišljen dokaz trebao bi biti poput pljuska hladne vode, trebao bi biti zraka svjetla – trebao bi osvježiti duh i pronsvijetliti um. I trebao bi biti *šarmantan*.

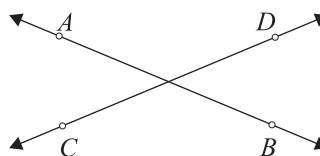
U onome što prolazi pod geometrijskim dokazom nema ničeg lijepog. Učenicima se izlaže kruta i dogmatska forma u kojoj se izvode takozvani “dokazi” – nepotrebna i neodgovarajuća forma koliko i zahtjev da djeca koja žele posaditi vrt, svoje cvijeće nazivaju po rodovima i vrstama.

Pogledajmo neke konkretne primjere tog ludila. Počet ćemo s primjerom dvaju ukrštenih pravaca:



Prva stvar koja se obično dogodi je nepotrebno zamučivanje vode pretjeranim označivanjem. Čini se da se ne može jednostavno govoriti o dva ukrštena pravca –

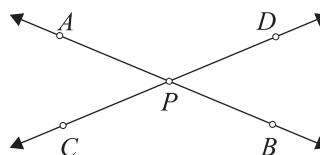
moraju im se dati složena, razrađena imena. I to ne jednostavna imena poput ‘pravac 1’ i ‘pravac 2’ ili čak ‘a’ i ‘b’. Moramo (prema srednjoškolskoj geometriji) odabrati proizvoljne i nevažne točke na tim pravcima i onda označavati te pravce rabeći posebnu vrstu zapisa.



Vidite, sad ih možemo zvati $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$. I Bože sačuvaj ako izostavite crte iznad slova jer $\overline{AB}$ se odnosi na *duljinu* dužine AB (barem mislim da to tako ide). Nema veze što je to tako besmisleno komplicirano, tako se treba naučiti. Sad dolazi tvrdnja, obično označena nekim glupim imenom kao što je

PROPOZICIJA 2.1.1.

Neka se $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ sijeku u P . Tada je $\angle APC \cong \angle BPD$.



Drugim riječima, kutovi su na obje strane jednaki. Pa to je bar očito! Položaj dvaju ukrštenih pravaca je *simetričan*, za ime Kristovo! I kao da to nije dovoljno loše, ova potpuno jasna tvrdnja o pravcima i kutovima mora se “dokazati”.

Dokaz:

Tvrdnja	Razlog
1. $m\angle APC + m\angle APD = 180^\circ$ $m\angle BPD + m\angle APD = 180^\circ$	1. hipoteza o zbroju kutova
2. $m\angle APC + m\angle APD = m\angle BPD + m\angle APD$	2. svojstvo zamjene
3. $m\angle APD = m\angle APD$	3. svojstvo refleksivnosti jednakosti
4. $m\angle APC = m\angle BPD$	4. svojstvo oduzimanja u jednakosti
5. $\angle APC \cong \angle BPD$	5. hipoteza o mjeri kuta

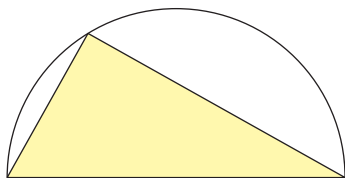
Umjesto domišljatog i ugodnog dokaza koji bi napisalo stvarno ljudsko biće i to na nekom od mnoštva postojećih svjetskih jezika, dobivamo ovaj sumoran, bezdušan, birokratski obrazac za dokaz. Radimo od buhe slona! Želimo li zaista reći da jasno opažanje poput ovog zahtijeva takav pretjerani uvod? Budite poštteni: jeste li ga uopće pročitali? Naravno da niste. Tko bi to htio?

Rezultat takve obrade nečeg toliko jednostavnog je da ljudi više ne vjeruju svojoj intuiciji. Dovoditi u pitanje očigledno, inzistiranjem da to bude "strog C B A D C B A D P 20 dokaz" (kao da ono gore uopće jest pravi formalni dokaz), jednako je kao reći učeniku "Tvoji osjećaji i ideje su sumnjivi. Moraš misliti i govoriti na naš način".

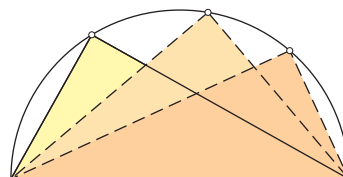
Za formalni dokaz u matematici postoji mjesto, bez sumnje. Ali to nije učenikovo prvo upoznavanje s matematičkom raspravom. Dajte barem da se ljudi upoznaju s nekim matematičkim objektima i da nauče što mogu od njih očekivati, prije nego počnete sve formalizirati. Strogi formalan dokaz postaje važan jedino kad nastupi *kri-za* – kad otkrijete da se vaši zamišljeni objekti ponašaju suprotno od očekivanog, kad dođe do neke vrste paradoksa. No, takva pretjerana preventivna higijena je ovdje sasvim nepotrebna – još se nitko nije razbolio! Naravno, dođe li do logičke krize u nekom trenutku, treba je istražiti i dokaz pojasniti, ali i taj proces se može izvesti intuitivno i neformalno. To je u stvari bit matematike – obaviti takav razgovor sa svojim dokazom.

Ne samo da je većina djece potpuno zbunjena tim cje-pidlačenjem – ništa nije toliko zbunjujuće kao dokazivanje očiglednog – nego čak i nekolicina onih čija intuicija ostane nedirnuta mora svoje izvrsne i prekrasne ideje prevoditi na taj smiješan hijeroglifski oblik da bi ih njihovi učitelji nazvali "ispravnim". Učitelj si tada laska da je na neki način izoštrio umove svojih učenika.

Kao složeniji primjer uzmimo slučaj trokuta u polukrugu:

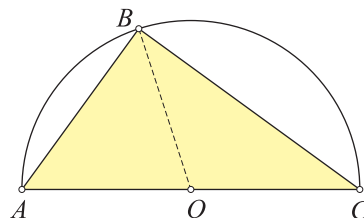


Prekrasna istina o ovom predlošku jest da bez obzira gdje smjestili vrh trokuta, on uvijek zatvara pravi kut. (Nemam primjedbi na izraze poput "pravog kuta" ako su važni za problem i olakšavaju raspravu. Ne prigovaram samoj terminologiji, već besmislenoj i nepotrebnoj terminologiji. U svakom slučaju, bio bih zadovoljan i s izrazom "ugao" ili čak "Superman", ako učenik tako više voli).



Evo slučaja kad je naša intuicija malo u nedoumici. Ni je uopće jasno da bi to trebalo biti istinito, čak se čini i *nevjerojatnim* – ne bi li se kut trebao mijenjati ako pomikem vrh? Ovdje imamo izvrstan matematički problem! Je li to točno? Ako jest, *zašto* je točno? Kakav divan projekt! Kakva sjajna prilika za vježbanje domišljatosti i mašte! Naravno, takva prilika se ne daje učenicima, njihova radoznalost i zanimanje se istog trena uguše:

TEOREM 9.5. Neka je trokut ABC upisan u polukrug promjera $\overline{AC}$. Tada je $\angle ABC$ pravi kut.



Dokaz:

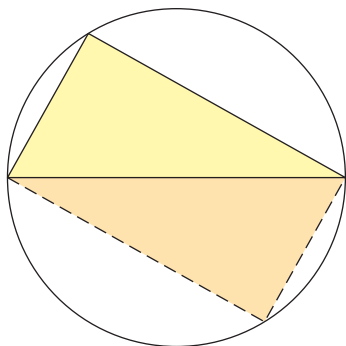
Tvrdnja	Razlog
1. Nacrtaj polumjer OB . Tada je $\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OA}$	1. zadano
2. $m \angle OBC = m \angle BCA$ $m \angle OBA = m \angle BAC$	2. teorem o jednakokraknom trokutu
3. $m \angle ABC = m \angle OBA + m \angle OBC$	3. hipoteza o zbroju kutova
4. $m \angle ABC + m \angle BCA + m \angle BAC = 180^\circ$	4. zbroj kutova trokuta je 180°
5. $m \angle ABC + m \angle OBC + m \angle OBA = 180^\circ$	5. supstitucija (red 2)
6. $2 m \angle ABC = 180^\circ$	6. supstitucija (red 3)
7. $m \angle ABC = 90^\circ$	7. svojstvo dijeljenja u jednakžbi
8. $\angle ABC$ je pravi kut	8. definicija pravog kuta

Može li išta biti neprivlačnije i neprofinjenije? Može li ijedan argument biti zamršeniji i nečitkiji? Ovo nije matematika! Dokaz bi trebao biti bogojavljanje, a ne kodirana poruka iz Pentagona. Eto što nastaje od pogrešno shvaćenog značenja logičke strogoće: *ružnoća*. Duša dokaza pokopana je pod hrpom zbunjujućih formalnosti. Nijedan matematičar tako ne radi.

Nijedan matematičar *ikad* nije tako radio. Ovo je potpuno i krajnje nerazumijevanje matematičkog pothvata. Matematika nije podizanje barijera između nas i naše intuicije, niti kompliciranje jednostavnih stvari. Matematika je uklanjanje prepreka našoj intuiciji i održavanje jednostavnih stvari jednostavnima.

Usporedimo ovu neprijatnu zbrku od dokaza s dokazom koji je izveo jedan od mojih sedmaša:

“Uzmi trokut i zarotiraj ga tako da s početnim zatvori četverostrani okvir unutar kruga. Kako je trokut zaokrenut potpuno naopako, stranice okvira moraju biti paralelne, tako da čine paralelogram. Ali to ne može biti nakošeni okvir jer su obje dijagonale promjeri kruga, pa su jednake što znači da to mora biti pravi pravokutnik. To je razlog što je kut uvijek pravi kut.”



Nije li to prekrasno? Poanta nije u tome je li ovaj dokaz bolji od prvog *kao ideja*, poanta je u tome da nam *sine* ideja. (U stvari, ideja prvog dokaza je prilično lijeпа, premda se nazire kao kroz staklo, i to tamno.)

Što je još važnije, ideja je bila učenikova *vlastita*. Razred je imao lijepi problem na kojem je trebalo raditi, načinili su pretpostavke, pokušali su dokazati i evo što je smislilo jedan učenik. Naravno, za to mu je trebalo par dana, i dokaz je bio rezultat dugog niza promišljanja.

Da budem iskren, znatno sam parafrazirao dokaz. Original je bio poprilično zamršeniji i sadržavao je puno nepotrebne prazne slame (kao i pravopisnih i gramatičkih pogrešaka). Ali mislim da sam skroz dobio osjećaj do-

kaza. A ti nedostaci imali su svoju dobru stranu; zadali su mi posla kao nastavniku. Bio sam u stanju istaknuti nekoliko stilskih i logičkih problema, pa je učenik onda mogao poboljšati dokaz. Primjerice, nisam baš bio zadovoljan dijelom u kojem kaže da su obje dijagonale promjeri – mislim da to nije sasvim očito – ali to je samo značilo da još o nečemu mora razmišljati i bolje shvatiti da bi se izvukao iz situacije. I zapravo je učenik vrlo lijepo premostio taj jaz:

“Kako se trokut rotira točno za polovinu kruga, vrh mu mora pasti točno nasuprot početnog položaja. Zato je dijagonala okvira promjer kruga.”

Eto, veliki je to projekt i prekrasan dio matematike. Ne znam tko je bio ponosniji, moj učenik ili ja. Točno to je vrsta iskustva kakvo želim pružiti svojim učenicima.

Problem s kurikulumom standardne geometrije je u tome što je privatni, osobni doživljaj da ste umjetnik koji se napreže praktično uklonjen. Umjetnost dokaza zamijenjena je krutim predloškom postupnih nenađahnjujućih formalnih zaključaka. Udžbenik predstavlja skup definicija, teorema i dokaza koje učitelji prepisuju na ploču, a učenici u svoje bilježnice. Od njih se onda traži da ih oponašaju u vježbama. Oni koji brzo shvate postupak, “dobri” su učenici.

Rezultat toga je da učenici postaju pasivni sudionici kreativnog čina. Učenici daju izjave kako bi se uklopili u već unaprijed određeni dokaz, a ne zato što oni to stvarno *misle*. Uči ih se da oponašaju dokaze, ne da misle *s namjerom*. Stoga ne samo da nemaju pojma što im učitelj govori, *nego ni oni sami nemaju pojma što govore*.

Čak je i uobičajeni način prezentiranja definicija lažan. U nastojanju da se stvori iluzija “jasnoće”, prije kretanja na čitav niz propozicija i teorema dan je niz definicija kako bi tvrdnje i njihovi dokazi bili što kraći. Površno gledano, to izgleda prilično bezazleno; pa zašto ne bismo načinili neka kraćenja tako da se stvari mogu izreći što ekonomičnije? Problem je u tome što su definicije *važne*. One su posljedica istančanih odluka o tome koja svojstva vi kao umjetnici smatrate važnima. I one su *proizašle iz problema*. Definirati nešto znači istaknuti i obratiti pažnju na neku osobinu ili konstrukcijsko svojstvo. Povijesno gledano, to je posljedica rada na problemu, a ne uvod u njega.

Poanta je da se ne počinje s definicijama, već s problemima. Nitko nije imao pojma je li neki broj “iracionalan”, sve dok Pitagora nije pokušao izmjeriti dijagonalu kva-

drata i otkrio da se duljina ne može opisati razlomkom. Definicije imaju smisla onda kad je u dokazu postignut cilj koji čini to svojstvo neophodnim. Definiranje stvari bez ikakve motivacije prije će izazvati zbunjenost.

To je samo još jedan primjer načina na koji se učenike štiti i isključuje iz matematičkog procesa. Učenici bi trebali biti sposobni sami definirati stvari kad se za to ukaže potreba – da sami zaokruže raspravu. Ne želim da učenici govore “definicija, teorem, dokaz”, želim da kažu “moja definicija, moj teorem, moj dokaz”.

Ostavimo li sve ove prigovore po strani, ostaje pravi problem u ovom načinu prezentacije, a to je da je ona dosadna. Efikasnost i ekonomičnost jednostavno ne čine dobru pedagogiju. Teško mi je povjerovati da bi Euklid ovo odobrio, a znam da Arhimed ne bi.

SIMPLICIO: Čekaj malo. Ne znam za tvoja iskustva, ali ja sam stvarno uživao u svojoj srednjoškolskoj geometriji. Svidjela mi se struktura i volio sam raditi u toj kružnoj formi dokaza.

SALVIATI: Siguran sam da jesi. Vjerojatno si povremeno radio i na nekim lijepim problemima. Mnogi uživaju na satima geometrije (iako ih mnogo više mrzi). Ali to nije bod u korist trenutnog režima. To je prije snažno svjedočanstvo zavodljivosti same matematike. Teško je sasvim uništiti nešto toliko lijepo, čak i ta blijeda sjena matematike još uvijek može biti privlačna i zadovoljavajuća. Mnogi uživaju i u “slikanju po brojevima” – to je opuštajući, šareni ručni rad. Ipak, to ga ne čini pravom stvari.

SIMPLICIO: Ali, kažem ti, meni se svidjelo.

SALVIATI: A da si doživio prirodnije matematičko iskustvo, svidjelo bi ti se još više.

SIMPLICIO: Znači, mi bismo se trebali otisnuti na neki slobodoumni matematički izlet, a učenici – što nauče, to nauče?

SALVIATI: Točno. Problemi će voditi do drugih problema, razvit će se tehnika onda kad postane neophodna, nove teme će nicati prirodno. A ako se dogodi da se u 13 godina školovanja neka stvar nikad ne pojavi, koliko zanimljiva ili važna onda ona može biti?

SIMPLICIO: Ti si sasvim poludio.

SALVIATI: Možda i jesam. Radeći čak i unutar uobičajenih okvira, dobar učitelj može voditi diskusiju i tijekom zadatka na način da dozvoli učenicima da sami otkriju

i smisle matematiku. Pravi problem je u tome što birokracija ne dopušta pojedinom učitelju da tako radi. Sa zadanim kurikulumom koji treba slijediti, učitelj ne može biti vođa. Standardi i kurikulum ne bi trebali postojati. Samo pojedinci koji rade ono što misle da je najbolje za njihove učenike.

SIMPLICIO: No, kako onda škole mogu jamčiti da će svi njihovi učenici imati isto osnovno znanje? Kako ćemo precizno izmjeriti njihovu relativnu vrijednost?

SALVIATI: Ne mogu i nećemo. Kao i u stvarnom životu. Konačno, moramo se suočiti s činjenicom da su svi ljudi različiti i to je baš dobro. U svakom slučaju, nema žurbe. Osoba završava srednju školu a da ne zna formule polovičnog kuta (kao da ih oni znaju!). Pa što? Ta će osoba barem izaći s nekom idejom o čemu je predmet zapravo i uspjeh će vidjeti nešto prekrasno.

U zaključku...

Kako bi stavio točku na i svoje kritike standardnog kurikuluma, i kao uslugu društvu, predstavljam vam prvi, ikad napisan, *potpuno iskren*, katalog predmeta K-12 matematičkog obrazovanja:

Standardni školski matematički kurikulum

OSNOVNOŠKOLSKA MATEMATIKA. Indoktrinacija za počinje. Učenici nauče da matematika nije nešto što radiš, već nešto što ti se radi. Naglasak je na mirnom sjedenju, ispunjavanju radnih listova i slijeđenju uputa. Od učenika se očekuje da savladaju složen skup postupaka za korištenje Hindi oznakama, koje nemaju nikakve veze sa stvarnom željom ili radoznalošću s njihove strane, a koje su samo par stoljeća ranije smatrane preteškima za prosječnu odraslu osobu. Forsira se tablica množenja, a roditelji, učitelji i sami učenici su pod stresom.

SREDNJOŠKOLSKA MATEMATIKA. Učenici uče promatrati matematiku kao skup postupaka, srodnih vjerskim obredima, koji su vječni i uklesani u kamen. Dijele se svete ploče, ili “matematički udžbenici”, a učenici crkvene starješine nauče nazivati “oni” (primjerice: “Šta oni traže ovdje? Traže da podijelim?”) Uvode se izmišljeni i umjetni “problemi riječima” i time se radi besmisleni napor da se tim usporedbama aritmetiku učini ugodnijom. Učenike će se ispitivati široki niz nepotrebnih tehničkih izraza, kao što je “cijeli broj” i “pravi razlomak”, bez imalo logičke podloge za takve odlike. Izvrсна priprema za Algebru I.

ALGEBRA I. I tako, umjesto da gubimo vrijeme razmišljajući o brojevima i njihovim uzorcima, ovaj predmet se usredotočuje na oznake i pravila za baratanje njima. Tečno umijeće pripovijedanja koje vodi od problema zapisanog na pločama iz drevne Mezopotamije do visoke umjetnosti renesansnih matematičara odbačeno je u korist uznemirujuće isprekidanog, post-modernističkog prepričavanja bez likova, zapleta ili radnje. Inzistiranje da se brojevi i izrazi postave u razne standardne oblike, dovest će do dodatne zbunjenosti u značenju identiteta i jednadžbe. Učenici iz nekog razloga moraju zapamtiti i kvadratnu formulu.

GEOMETRIJA. Izdvojena od ostatka kurikuluma, geometrija će probuditi nadu onih učenika koji žele sudjelovati u smislenim matematičkim aktivnostima, a onda će je uništiti. Uvest će se nespretni i zbunjujuće oznake i neće se štedjeti na kompliciranju jednostavnih stvari. Cilj ovog predmeta je da iskorijeni svaki preostali trag prirodne matematičke intuicije, pripremajući učenike za Algebru II.

ALGEBRA II. Tema ovog predmeta je nemotivirajuća i neprikladna uporaba koordinatne geometrije. Čunjosječnice se uvode pomoću koordinatnog sustava kako bi se izbjegla lijepa (istančana) jednostavnost konusa i njegovih presjeka. Učenici će naučiti ispisivati kvadratne forme u svim mogućim varijacijama standardnih oblika, bez ikakvog posebnog razloga. U Algebr II uvode se i eksponencijalne i logaritamske funkcije, iako nisu predmet algebre, očito samo zato jer moraju biti negdje ubačene. Naslov predmeta odabran je da podrži mit o ljestvama. Zašto se između Algebre I i njezinog nasljednika pojavljuje Geometrija, ostaje tajna.

TRIGONOMETRIJA. Dvotjedni sadržaj rastegnut je na jedan semestar masturbirajućim definicijskim oprčavanjima. Uistinu zanimljivoj i lijepoj pojavi, kao što je način na koji stranice trokuta ovise o njegovim kutovima, bit će pridana jednaka važnost kao beznačajnim skraćivanjima i zastarjelim nacionalnim dogovorima, kako bi se spriječilo učenike da stvore imalo jasniju sliku o čemu je predmet zapravo. Učenici će naučiti mnemoničke olakšice "SohCahToa" and "All Students Take Calculus" umjesto da razvijaju prirodan intuitivni osjećaj za orijentaciju i simetriju. Raspravljat će se o mjerenju trokuta bez spominjanja transcendentne prirode trigonometrijskih funkcija, ili jezičnih i filozofskih problema koji su slijedili, a svojstveni su tim mjerenjima. Traži se kalkulator, tako da dodatno zamuti te teme.

UVOD U RAČUN. Besmislena kaša nepovezanih tema. Uglavnom napola ispečen pokušaj da se upoznaju analitičke metode s kraja 19. stoljeća, kroz situacije u kojima one nisu ni potrebne ni korisne. Tehničke definicije limesa i neprekidnosti predstavljene su da bi zamračile intuitivno jasan pojam glatke transformacije. I kao što naziv sugerira, ovaj predmet priprema učenike za Račun, gdje će se dovršiti posljednja faza sustavnog zamračivanja svake prirodne ideje o liku i gibanju.

RAČUN. Ovaj predmet će istraživati matematiku gibanja i najbolje načine koji će ga zatrpiti pod brdom nepotrebnog formalizma. Jednostavne i mudre ideje Newtona i Leibniza, iako su uvod u oba, i diferencijalni i integralni račun, bit će odbačene u korist sofistiranijeg pristupa temeljenog na funkcijama, koji je nastao kao odgovor na razne analitičke krize koje se u ovom predmetu ne traže i koje naravno neće biti ni spomenute. Doslovce isto će se ponoviti i na fakultetu.

Eto vam ga. Cjelokupan recept za trajno onesposobljivanje mladih umova – dokazani lijek protiv radoznalosti. Što su učinili matematičari! U toj drevnoj umjetničkoj formi leži mudrost koja oduzima dah, ljepota koja slama srce. Ironično je kako ljudi odbacuju matematiku kao suprotnost kreativnosti. Propuštaju umjetničku formu stariju od ijednog udžbenika, dublju od ijedne pjesme i sadržajniju od ijednog sadržaja. A to je učinila škola! Kakav žalostan beskrajni krug nevinih učitelja koji nanose štetu nevinim učenicima. A moglo bi biti puno zabavnije.

SIMPLICIO: U redu, potpuno sam deprimiran. Što sad?

SALVIATI: Pa, mislim da imam ideju o piramidi unutar kocke....

Prevela: Sandra Gračan