Zabavna matematika
i nastava matematike

Branimir Dakić, Zagreb

- *Zabavna matematika je sklop dviju riječi za koje će pomisliti da nikako ne mogu biti zajedno, jer su matematika i zabava potpuno suprotni pojmovi...*
- *Zabavna je matematika dio matematike. Važna je njezina uloga od davnine, od prvih pisanih matematičkih tragova...*
- *Zabavna je matematika mnoge potakla da se zainteresiraju i trajno vežu za matematiku...*

(*Mirko Polonijo*)

U prošlom broju MiŠ-a bilo je, između ostalog, riječi i o didaktičkoj ulozi primjera primjene matematike u smislu podizanja motivacije i razine zornosti u nastavi matematike. Na istom tragu možemo razmišljati i o ulozi zabavne matematike u nastavi. "Zabavna" možda i nije najsretnije izabran naziv ali je u nas uvriježen pa se zna što se pod tim nazivom podrazumijeva. Ponekad se rabi i naziv *zanimljiva matematika*, na Zapadu je to često *rekreativna matematika*, a govori se i o *matematičkim glavolomkama*. No bilo kako bilo sadržaj je uvijek isti: radi se o stvarnim problemima uobličenim u zagonetke čime oni postaju "zabavniji" – privlačniji za rješavanje. U rješavanju se pritom ne mogu zaobići postupci koji su zapravo svojstveni matematičkom načinu mišljenja i uglavnom ne zahtijevaju neko veće teorijsko znanje. Možda upravo to i opravdava veliku popularnost ove grane matematike. Prisjetimo se da se na matematičkim natjecanjima u Hrvatskoj na osnovnoškolskoj razini pojavljuju zadaci koje možemo razvrstati u područje zabavne matematike (zadaci o prelijevanju, vaganju, razrezivanju, bojenju, prebrajanju…). Sklonosti učenika raznim matematičkim zagonetkama svjedoči i prije nekoliko godina začeto natjecanje srednjoškolaca u rješavanju *sudoku* zadataka što ga je potaknula u zagrebačkoj 13. gimnaziji kolegica Snježana Šišić, a koje je svake godine sve masovnije pa je daleko prešlo okvire samo te škole.

Nije li već iz ovog uvoda razvidno kako bi didaktička uloga zabavne matematike mogla biti korisna i u nastavi? Intuitivno to znaju i nastavnici pa se nerijetko u svojoj nastavi koriste povijesnim pričama.

Matematičke su se zagonetke pojavile u davna, da ne kažemo pradavna vremena. Tako primjerice čuveni Rhind papirus (oko 1850. g. prije Krista) obiluje takvim sadržajem. Poznata je brojalica:

U sedam je kuća sedam mačaka. Svaka mačka ulovi sedam miševa. Svaki miš pojede sedam klasova žita. Svaki klas mogo bi dati sedam hekata[1] žita. Koliko je toga svega zajedno?

Podsjetimo se i lijepe stare grčke zagonetke čije će rješenje odgovoriti na pitanje *Koliko je poživio Diofant?*, a čije rješenje je vezano uz račun s razlomcima. Tu je zatim i priča o izumitelju šaha, koja može biti lijep uvod u obradu pojma potencije ili kao primjer uz obradu geometrijskog niza?

U pretprošlom broju MiŠ-a bilo je riječi o Arhimedu pa smo spomenuli i njegov *stomakion*, koji podsjeća na tangram, popularnu i vrlo staru kinesku slagalicu sa sedam dijelova od kojih se može složiti mnoštvo zanimljivih oblika. Tangram se kao svojevrsna zaraza širio svijetom osobito posljednjih nekoliko stoljeća. Mnogi su njome bili opsjednuti pa i Lewis Caroll, pisac čuvene Alise u zemlji čudesa, a može se pročitati kako je i Napoleon, poznat kao veliki matematički entuzijast, ovom igricom kratio svoje prognaničke dane na Sv. Heleni.

Vrlo je poznata i Arhimedova zagonetka Problem sa stokom (*Cattle Problem*), problem koji pripada Diofantovoj analizi, dijelu algebre u kome se traže cjelobrojna rješenja algebarskih jednadžbi ili sustava jednadžbi. Bio je otvoren tijekom niza stoljeća, možda zahvaljujući i tome što su brojevi koji se pojavljuju pri njegovom rješavanju uistinu ogromni. Rješenje je dao 1880. g. A. Amtor i prema njemu rješenje je broj $7.76 \cdot 10^{206544}$.

Uz Arhimeda se vežu i brojni drugi zanimljivi zadaci od kojih se prisjetimo tek još samo dvaju: Krznarski nož i Rimska soljenka, vrlo su pogodni uz obradu površine kruga.

Nadalje, čuveni Fibonaccijev problem s razmnožavanjem zečeva može poslužiti kao motivacijski primjer uz uvodnu obradu niza ali i kao kasniji vrlo uvjerljiv primjer rekurzivno definiranog niza. Zadatak se pojavio 1202. g. u knjizi *Liber abaci*, a u istoj se knjizi može zateći i više drugih zgodnih zagonetki.

Spomenimo i *magični kvadrat*, kvadrat $n \cdot n$ u čija polja valja upisati brojeve $1, 2, 3, ..., n^2$ tako da zbroj brojeva u svakom retku, u svakom stupcu i na dijagonalama bude jednak. Ovaj problem star je više od 4 000 godina. I on, kao i mnogi drugi, potječe iz Kine i izvorno je poznat pod nazivom

Slika 1. Na slici lijevo je kutija s dijelovima tangrama, a na slici desno kutijica s kraja 19. stoljeća

[1] Hekat – stara egipatska mjera za obujam.

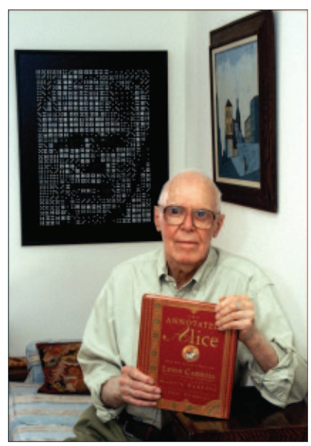
lo–shu. Jedan od najpoznatijih magičnih kvadrata nalazi se na vrlo čuvenoj Dürerovoj grafici *Melancholia* iz (1514.). Pitanje koliko ima magičnih kvadrata za dani broj n, pitanje je na koje još uvijek nema odgovora. Zna se tek da ima 880 kvadrata tipa $4 \cdot 4$ i $275\,305\,224$ kvadrata $5 \cdot 5$.

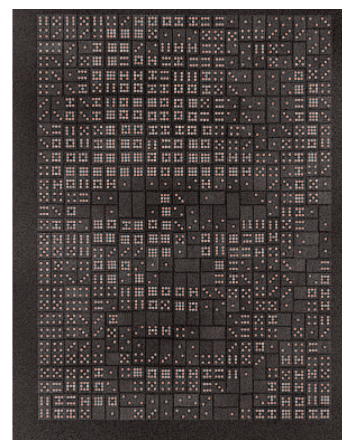
Moglo bi se nastaviti unedogled s navođenjem povijesnih primjera.[2] Brojni su primjeri vezani i uz velika matematička imena, a težina problema varira od sasvim jednostavnih do vrlo složenih, od kojih su neki otvoreni još i dan-danas.

No jednog matematičara ne smijemo ispustiti. Leonhard Euler bio je pravi majstor u rješavanju zanimljivih problema od kojih su neki utemeljili čak i cijele matematičke discipline. Spomenimo *Skakačev put po šahovskoj ploči*, zatim *Problem tridesetšest časnika* te *Problem sedam mostova u Königsbergu*.

Ipak, zabavna se matematika potpuno afirmirala i reklo bi se postala ravnopravni dio matematike tek krajem 19. i u prošlom stoljeću kad se pojavljuju matematičari koji su potpuno predani ovom području. Spomenimo neke od njih: Sam Loyd (1841. – 1911.) (poznat je po čuvenoj slagalici s 15 pločica), Henry Ernest Dudeney (1857. – 1930.), Edouard Lucas (tornjevi Hanoja) (1842. – 1891.), Jakov Izidorovič Pereljman (1882. – 1942.), Raymond Smullyan (1919. –), Solomon Golomb (polimino) (1932. –).

No iz dugačkog popisa zanesenjaka zabavnom matematikom te uz sve opasnosti koje u sebi skriva svako izdvajanje, ipak valja istaknuti jedno ime. Američki matematičar Martin Gardner (1914., Tulsa, Oklahoma) čovjek je bez znanstvene titule, ali je čovjek o kojem se u svijetu matematičara govori s punim uvažavanjem i respektom. Gardner je uz

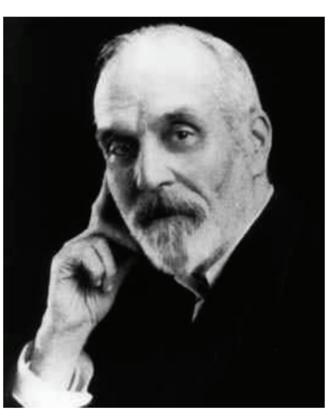
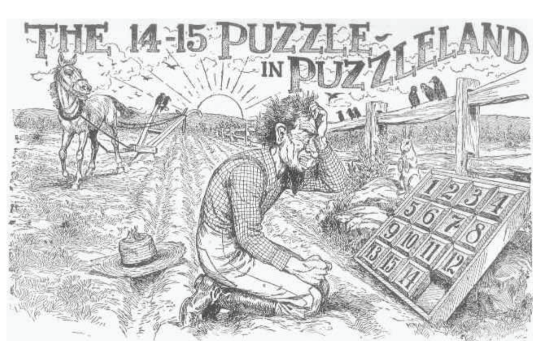




Slika 3. Na slici lijevo je Martin Gardner, a u pozadini i na slici desno je njegov portret složen od domino pločica

bavljenje rekreacijskom matematikom silno pridonio popularizaciji matematike. Od 1956. do 1981. u najpoznatijem svjetskom časopisu za popularizaciju znanosti "Scientific American" objavljivao je kolumnu "Mathematical Games". Objavio je više od 60 knjiga, veliku većinu iz područja zabavne matematike.

Osvrnimo se još nakratko i na zabavnu matematiku u nas. Prva knjiga matematičkih glavolomki u nas pojavila

Slika 2. Na slici lijevo je Henry Ernest Dudeney, a na slici desno slagalica s 15 pločica Sama Loyda

[2] Detaljnije se može pročitati u [3], u uvodu.

se 1867. Bile su to “Matematičke mudrolije” Eugena Kovačevića. Knjiga nije sačuvana, ali je jedna druga knjiga, “Mali zabavljač” dostupna u Nacionalnoj i sveučilišnoj biblioteci u Zagrebu.[3] U njoj je pisac Julije Varžička dao 100 raznovrsnih problema.

Svojedobno je prevedena i objavljena jedna knjižica Sama Loyda. Dr. Vladimir Devidé objavio je knjižicu “Zabavna matematika” (Školska knjiga, Zagreb 1988.). Posebice istaknimo dvije knjižice dr. Mirka Polonija *Matematički problemi za radoznalce*, (Školska knjiga, Zagreb 1979.) te *Matematičke razbibrige za radoznalce* (Element, Zagreb, 1995.). Iz ove posljednje jest i uvodni moto. Dr Zdravko Kurnik u popularnom MFL-u vodi redovitu rubriku "Zabavna matematika".

Slika 4. Prof. dr. sc. Mirko Polonijo i njegove "Matematičke razbibrige"

Slika 5. “*The Milkmaid Puzzle*”

U drugom dijelu ovog članka na jednom lijepom primjeru pokazat ćemo kako se jedna i jednostavna glavolomka može lijepo iskoristiti i iz nje razviti više zanimljivih rješenja. Objavljena je kao 187. problem nazvan “*The Milkmaid Puzzle*” u knjizi *Amusements in Mathematics* (1917.) Ernesta Dudeneya.

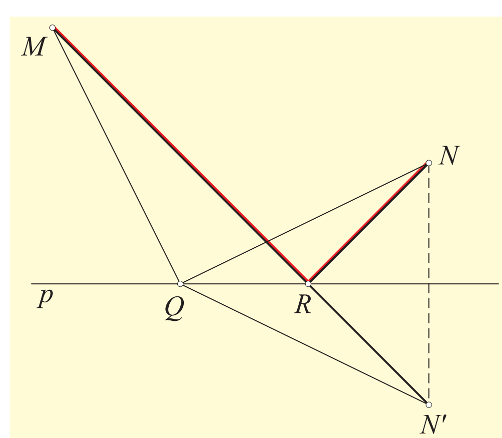
Evo kako glasi taj problem:

U jednom se kutu slike vidi mljekarica kako muze kravu, u drugom je mljekara u koju ona ima isporučiti mlijeko. Valja primijetiti kako mlada žena sa svojim vjedrom prije isporuke uvijek svrati do rijeke. Možda će sumnjičav čitatelj upitati zašto ona to čini. Ja bih tek odgovorio kako to nije naša stvar. To je mlijeko ionako za lokalne potrebe.

- *Kamo ćeš, lijepa djevo?*
- *Do rijeke, gospodine!, odgovori ona.*
- *Ne bih kupio vaše mlijeko, ljepotice.*
- *Nitko to od vas i ne traži, gospodine, reče ona.*

Iscrtajte put koji valja prijeći mljekarica od mjesta na kojem je pomuzla kravu do vrata mljekare, ali tako da bude najkraći moguć.

Na slici 6 je geometrijsko rješenje danog problema.



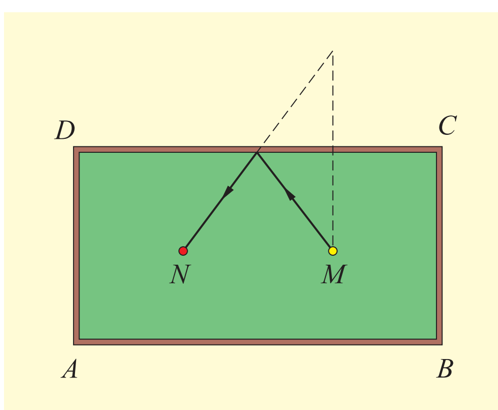
Slika 6.

[3] Prema uvodu u [3].

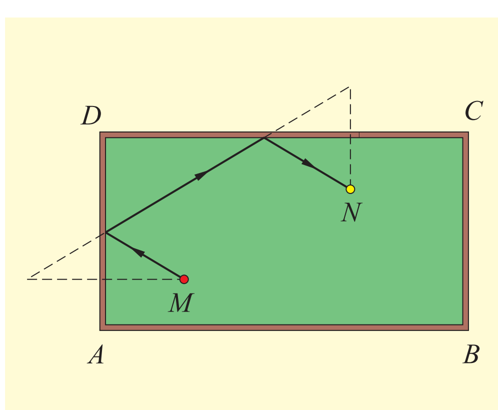
Neka je mljekarica u točki M i neka je mljekara točka N. Rijeka je pravac p.

Zrcalimo točku N prema pravcu p. Njezina je slika točka N'. Spojimo pravcem točke M i N'. Ta spojnica siječe pravac p u točki R pri čemu je $|MR| + |RN| = |MN'|$ traženi najkraći put. Naime, ako bi mljekarica prišla rijeci u nekoj drugoj točki, primjerice točki Q, onda bi bilo $|MQ| + |QN| = |MQ| + |QN'| > |MN'|$. Ovime je riješen zadatak.

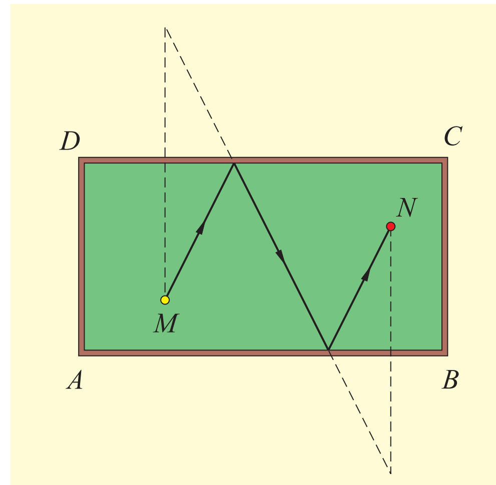
Rješenje nije nepoznato jer je riječ o tzv. Fermatovom putu, koji prelazi zraka svjetlosti pri refleksiji na ravnom zrcalu. Isto načelo nalazimo i pri biljarskoj igri jer se kuglica nakon udara o rub stola odbija pod istim kutom pod kojim je prema tom rubu i došla. Na slikama 7, 8 i 9 vidimo nekoliko situacija iz ove igre. Ona na slici 7 je najjednostavnija i



Slika 7.



Slika 8.



Slika 9.

njezino se rješenje oslanja izravno na rješenje zadatka o mljekarici. Na drugoj slici prikazana je situacija u kojoj se kuglica M prije udara u kuglicu N mora uzastopce odbiti od rubova AD i CD. Na trećoj, kuglica M prije udarca u kuglicu N odbija se od rubova CD i AB.

I konačno riješimo jedan "pravi" matematički zadatak:

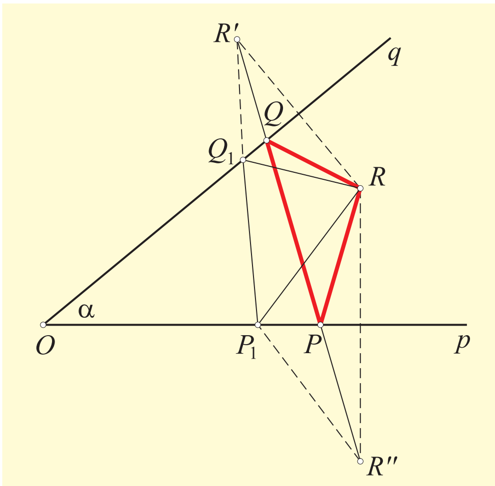
U dani šiljastokutan trokut upišimo trokut najmanjeg opsega. Zadatak ćemo riješiti postupno, razmatranjem dvaju jednostavnijih zadataka.

Prvi: Unutar danog šiljastog kuta α nalazi se točka R. Odredite točke $P \in p$ i $Q \in q$ tako da opseg trokuta ΔPQR bude najmanji moguć.

Zrcalimo točku R prema krakovima p i q kuta α (slika 10). Dobit ćemo točke R' i R''. Spojnica $R'R''$ na kracima kuta određuje točke P i Q, a trokut ΔPQR rješenje je zadatka. Naime spojnica $R'R''$ preko nekih drugih dviju točaka P_1 i Q_1 je izlomljena pa samim tim i dulja od dužine $\overline{R'R''}$.

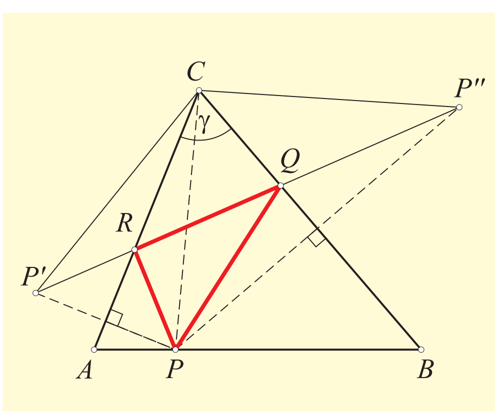
Neka je sada dan šiljastokutan trokut ΔABC i na njegovoj stranici $\overline{AB}$ neka je dana točka P. Odredite $Q \in \overline{BC}$ i $R \in \overline{AC}$ tako da upisani trokut ΔPQR ima najmanji opseg.

Taj zadatak zapravo je jednak prethodnom. Činjenica da je točka P na stranici $\overline{AB}$ nije bitna za rješavanje problema. I rješenje je stoga isto. Zrca-



Slika 10.

limo točku P prema stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ te tako dobijemo točke P' i P''. Spojnica $P'P''$ određuje točke Q i R, a trokut $\Delta\ PQR$ najmanjeg je opsega (slika 11).

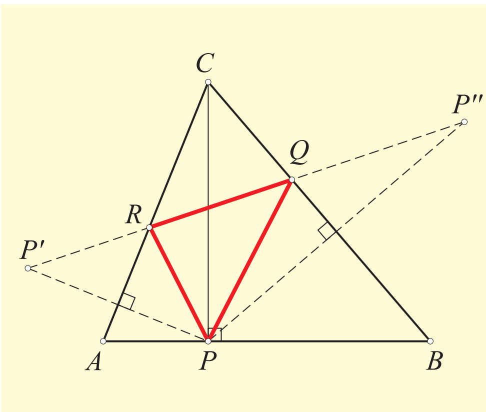


Slika 11.

* * *

Ipak, iz ovog rješenja izvucimo neke vrlo važne zaključke:

Prije svega $\sphericalangle P'CP'' = 2\gamma$, jer je $\sphericalangle PCA \cong \sphericalangle ACP'$ te $\sphericalangle PCB \cong \sphericalangle BCP''$. Veličina tog kuta trokuta $\Delta\ PCP$ ne mijenja se, uvijek je jednaka 2γ, neovisno o položaju točke P na stranici $\overline{AB}$.



Slika 12.

Nadalje, trokut $\Delta\ P'CP''$ je jednakokračan jer su njegovi krakovi $\overline{P'C}$ i $\overline{P''C}$ simetrične slike iste dužine, dužine $\overline{PC}$. Osnovica tog jednakokračnog trokuta, dužina $\overline{P'P''}$ jednaka je opsegu upisanog trokuta $\Delta\ PQR$. Ta dužina mijenja duljinu ovisno o duljini dužine $\overline{CP}$, a ona je najkraća kada je P nožište visine spuštene iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$.

I time smo zaokružili priču o mljekarici. Zasigurno bi se moglo naći i mnoštvo sličnih primjera u kojima nas neka lijepa matematička glavolomka uvodi u rješavanje "ozbiljnog" matematičkog zadatka.

LITERATURA

[1] B. Dakić, *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb.

[2] V. Devidé, *Zanimljiva matematika*, Školska knjiga, Zagreb.

[3] M. Polonijo, *Matematički problemi za radoznalce*, Školska knjiga, Zagreb.

[4] M. Polonijo, *Matematičke razbibrige*, Element, Zagreb.