Gaudeamus igitur

Anđelko Marić, Sinj

U posljednje sam vrijeme stjecajem nekih okolnosti imao prigodu nešto više saznati o matematici na (državnim) maturama u nekim europskim zemljama. Nalazimo se "pred vratima Europe" (ma što god to značilo) i očekuje se da će se školstvo u cjelini, a ne samo poput visokoškolske bolonje, morati prilagoditi europskim standardima. To, a još više ove puste bure oko državne mature u Hrvatskoj, potaklo me je da napišem ovaj članak.

Odustao sam, u samom tijeku oblikovanja ovih misli, bilo što reći o događanjima u posljednje dvije godine oko mature u nas. Naime, ti događaji zasigurno ne upućuju na dobro i trebalo bi sve nekako dovesti u red. Ali, kako smo rekli, ostavimo to. U članku ćemo se pozabaviti jednim jedinim zadatkom koji je bio na državnoj maturi za prirodoslovne gimnazije (*Esame di stato di liceo scientifico*) u Italiji 2007. godine. Navedimo kratke tehničke podatke o pisanom ispitu koji se sastoji od dva dijela.

U prvom dijelu ponuđena su dva problemska zadatka. U svakom od ta dva zadatka su četiri dijela zadatka koji se svi odnose na iste zadane podatke. U drugom dijelu nalazi se 10 zadataka koji su po sadržaju jedinstveni. Kandidat bira jedan od dva zadatka iz prvog dijela i pet zadataka iz drugog dijela. (U tekstu se ne navodi je li to minimum, ili se za to može dobiti i najviša ocjena i može li kandidat rješavati više od toga). Ispit traje 6 sati. Tekst zadatka koji ćemo rješavati glasi:

Promatrajmo trokute kojima je duljina osnovice $|AB| = 1$ i vrh C promjenjiv, tako da je $\sphericalangle CAB$ jednak dvostrukom $\sphericalangle ABC$.

1) Uvede li se u ravnini prikladan koordinatni sustav, treba odrediti jednadžbu geometrijskog mjesta točaka (Γ) koje opisuje vrh C.

2) Predočite Γ na temelju računskog rezultata, zanemarivši postavljene geometrijske uvjete.

3) Odredite veličinu $\sphericalangle ABC$ za koju je zbog kvadrata visina na stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ najveći moguć. Pomoću računala taj kut izrazite zaokruženo u stupnjevima i minutama.

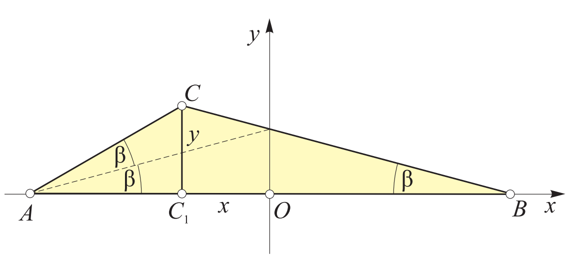
4) Dokažite: ako je $\sphericalangle ABC = 36°$, tada je $|AC| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Mora se autoru teksta ovog zadatka priznati vještina u sastavljanju zadataka. Naime, u zadatku je kondenzirana skoro čitava srednjoškolska matematika. Napomenimo da nam nije dostupno službeno rješenje zadataka i da za sva rješenja koja slijede odgovara autor članka. Pri rješavanju koristili smo elemente analitičke geometrijske ravnine, svojstva trigonometrijskih funkcija (uključujući i trigonometrijske jednadžbe), neke planimetrijske poučke, ekstremne vrijednosti kvadratne (točnije bikvadratne) funkcije, minimum jednog trigonometrijskog izraza, kao i kompleksne brojeve. Ključni dio zadatka je onaj pod 1. Naime, ako se to ne riješi, teško će se drugi dijelovi (osim možda pod 3) riješiti. Zato ćemo taj dio zadatka riješiti na više načina.

Podzadatak 1) — prvi način

Uvedimo pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u polovištu dužine $\overline{AB}$ i da os apscisa sadrži tu dužinu. Koordinate zadanih točaka su $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ i $B\left(\frac{1}{2},0\right)$. Koordinate vrha C označimo $C(x, y)$. Prema zadanim uvjetima je

$$\alpha = \sphericalangle CAB = 2\beta = 2\sphericalangle ABC.$$



Isto tako vrijedi $|C_1A| = x + \frac{1}{2}$, $|C_1B| = \frac{1}{2} - x$. Odavde je

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{\frac{1}{2}-x} = \frac{2y}{1-2x}, \quad \operatorname{tg}2\beta = \frac{y}{\frac{1}{2}+x} = \frac{2y}{1+2x}.$$

Koristimo formulu $\operatorname{tg}2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}$, odakle je

$$\operatorname{tg}2\beta = \frac{\frac{4y}{1-2x}}{1-\frac{4y^2}{(1-2x)^2}} = \frac{4y(1-2x)}{(1-2x)^2-4y^2}.$$

Izjednačimo li izraze za $\operatorname{tg}2\beta$, dobit ćemo

$$\frac{4y(1-2x)}{(1-2x)^2-4y^2} = \frac{2y}{1+2x}, \quad 2y\frac{2(1-2x)}{(1-2x)^2-4y^2} - \frac{1}{1+2x} = 0.$$

Za $y = 0$, trokut degenerira u dužinu. Iako formalno vrijedi $\alpha = 2\beta = 0$, uzimamo $y \neq 0$.

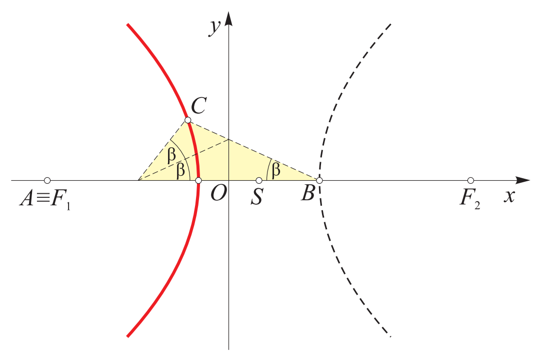
Zato je $\frac{2(1-2x)}{(1-2x)^2-4y^2} - \frac{1}{1+2x} = 0$,

$$1 - 4x + 4x^2 - 4y^2 = 2(1-4x^2),$$

$$12x^2 - 4x - 4y^2 = 1,\ 3x^2 - x - y^2 = \frac{1}{4},$$

$$3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) - y^2 = \frac{1}{4}, \quad 3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right] - y^2 = \frac{1}{4},$$

$$3\cdot\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}; \quad \frac{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

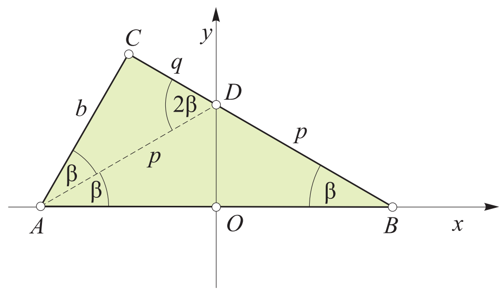


Iz ove jednadžbe očitamo da je traženi skup Γ hiperbola sa središtem u točki $S\left(\frac{1}{6}, 0\right)$ i duljina poluosiju $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Odredimo položaj zadanih točaka A i B prema hiperboli. Za linearni ekscentricitet hiperbole vrijedi $e^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$, $e = \frac{2}{3}$. Apscise žarišta su $\frac{1}{6} \pm \frac{2}{3} = 1 \pm \frac{4}{6}$, odakle je $F_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $F_2\left(\frac{5}{6}, 0\right)$. Tjemena hiperbole imaju apscise $x_s \pm a = \frac{1}{6} \pm \frac{1}{3} = \frac{1 \pm 2}{6}$. Zato su tjemena u točkama $\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{6}, 0\right)$.

Zaključak: Nađena jednadžba predočuje hiperbolu kojoj je realna os pravac AB, pri čemu je točka A jedno žarište i točka B jedno tjeme hiperbole. Iz geometrijskih razloga skup Γ je samo jedna grana hiperbole i to lijeva.

Podzadatak 1) — drugi način

Uvedimo isti koordinatni sustav kao u prethodnom postupku, to jest: $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $C(x, y)$.



Simetrala kuta CAB siječe os ordinatu u točki D. Trokut ABD je jednakokračan. Označimo $|BD| = p$, $|DC| = q$, to jest $p + q = |BC| = a$. Isto je tako (zadano) $|AB| = c = 1$. Kut ADC je vanjski kut trokuta ABD, zbog čega je $\sphericalangle ADC = 2\beta$. Vidimo da su trokuti ABC i DAC slični, zbog čega je $b : q = a : b$, odakle je $q = \frac{b^2}{a}$. Prema poučku o simetrali unutarnjeg kuta trokuta vrijedi $q : p = b : c$, odakle je $(q + p) : q = (b + c) : b$, $a : q = (b + c) : b$, $q = \frac{ab}{b + c}$. Uspoređivanjem izraza za q, dobijemo $\frac{b^2}{a} = \frac{ab}{b + c}$, ili $a^2 = b^2 + bc$. U ovom slučaju je $a^2 = b^2 + b$. Dalje je $a^2 = |BC|^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2$, $b^2 = |AC|^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2$, što daje

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}\,;$$

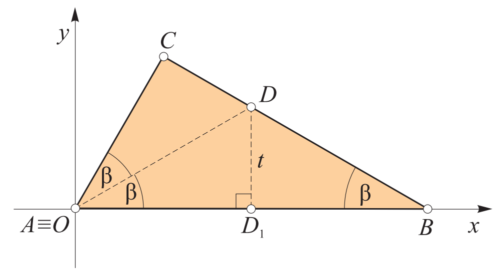
$$-2x = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2},\ 4x^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2,$$

$$3x^2 - x - y^2 = \frac{1}{4}.$$

Ovu jednadžbu dobili smo i u prvom načinu rješavanja, odakle slijede i isti zaključci. Napomena: Iz jednadžbe $-2x = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}$ u kojoj je desna strana pozitivna zaključujemo da je $x < 0$. To znači da je skup Γ samo jedna grana hiperbole i to ona kojoj je (kako smo već našli) žarište A.

Podzadatak 1) — treći način

Zadatak ćemo riješiti pomoću kompleksnih brojeva. Zato je pogodnije odabrati koordinatni sustav, kao na slici, to jest koordinate točaka su: $A \equiv O\,(0, 0)$, $B\,(1, 0)$, $C\,(x, y)$. Neka je D točka na stranici $\overline{BC}$, tako da njena ortogonalna projekcija na os apscisu bude polovište dužine $\overline{AB}$, to jest



$D_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ i $D\left(\frac{1}{2}, t\right)$. Točki D pridružen je kompleksan broj $z_D = \frac{1}{2} + ti$, $t \in R \setminus \{0\}$.

Koristimo sljedeće svojstvo kompleksnih brojeva: argument kvadrata kompleksnog broja jednak je dvostrukom argumentu tog broja, što se može zapisati $\arg(z^2) = 2\arg(z)$; $z \in C$.

Zbog toga će slika broja z_D^2 biti točka pravca AC. Vrijedi $z_D^2 = \frac{1}{4} - t^2 + ti$. Zato svaka točka pravca AC ima koordinate $x = \lambda\left(\frac{1}{4} - t^2\right)$, $y = \lambda t$; $\lambda \in R$. Odavde je

$$\frac{y}{x} = \frac{t}{\frac{1}{4} - t^2}\,. \tag{1}$$

Jednadžba pravca BD glasi $y = \frac{t}{-\frac{1}{2}}(x - 1)$, odakle je $t = \frac{y}{2(1 - x)}$, što uvršteno u (1) daje

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{2(1-x)}}{\frac{1}{4} - \frac{y^2}{4(1-x)^2}},\quad \frac{y}{x} = \frac{2y(1-x)}{(1-x)^2 - y^2}.$$

Već smo utvrdili da je $y \neq 0$, zbog čega je

$(1 - x)^2 - y^2 = 2x(1 - x)$, $3x^2 - 4x - y^2 + 1 = 0$.

Pokažimo da ova jednadžba predočuje istu krivulju kao u dva prethodna načina. Pomakom duž osi x za $-\frac{1}{2}$, dobivena jednadžba prelazi u

$$3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{2}\right) - y^2 + 1 = 0,$$

$$3x^2 + 3x + \frac{3}{4} - 4x - 2 - y^2 + 1 = 0,$$

$$3x^2 - x - y^2 = \frac{1}{4},$$

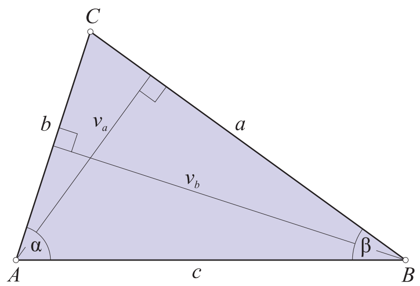
što je već dobivena jednadžba.

Podzadatak 2)

Utvrdili smo što je skup Γ, to jest da se radi o hiperboli. Također smo naveli sve karakteristike i nacrtali graf hiperbole. Zato je ovaj dio zadatka u potpunosti riješen.

Podzadatak 3)

Ovdje moramo biti oprezni pri izboru metode. Pokušamo li to analitičkom metodom, dobit ćemo veoma složen račun koji je teško dovesti do kraja. Zadatak ćemo riješiti trigonometrijskom metodom.



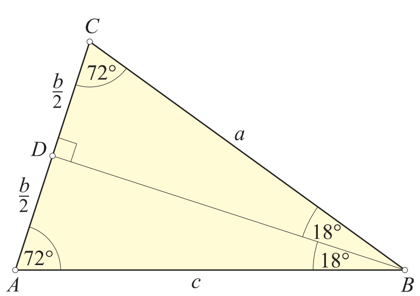
Treba odrediti β tako da izraz $V = v_a^2 + v_b^2$ bude najveći moguć. Vrijedi:

$$v_a = c \sin\beta,\ v_b = c \sin 2\beta.$$

Odavde je ($c = 1$):

$$\begin{aligned} V &= \sin^2\beta + \sin^2 2\beta = \sin^2\beta + 4\sin^2\beta\cos^2\beta \\ &= \sin^2\beta + 4\sin^2\beta\,(1 - \sin^2\beta) = -4\sin^4\beta + 5\sin^2\beta \\ &= -4\left(\sin^4\beta - \tfrac{5}{4}\sin^2\beta\right) = -4\left[\left(\sin^2\beta - \tfrac{5}{8}\right)^2 - \tfrac{25}{64}\right] \\ &= -4\left(\sin^2\beta - \tfrac{5}{8}\right)^2 + \tfrac{25}{16}. \end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da je najveća vrijednost promatranog izraza jednaka $\frac{25}{16}$, za $\sin^2\beta = \frac{5}{8}$, to jest za $\sin\beta = \frac{\sqrt{10}}{4}$ (jer je β šiljasti kut), odnosno za $\beta = 52°14'$.



Podzadatak 4)

Ako je $\beta = 36°$, tada je $\alpha = 2 \cdot 36° = 72°$, $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 108° = 72°$. Vidimo da je trokut ABC jednakokračan. Zato se visina i simetrala kuta iz vrha B podudaraju. Iz $\sin 18° = \frac{\frac{b}{2}}{c}$, slijedi zbog $c = 1$, $b = 2\sin 18°$. Problem se svodi na izračun sinusa kuta od 18°. Označimo li $x = 18°$, imamo $5x = 90°$, $3x = - 90° - 2x$, odakle je:

$$\begin{aligned} &\sin 3x = \cos 2x,\ \sin(2x + x) = \cos 2x, \\ &\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \cos 2x, \\ &2\sin x \cos^2 x + \cos 2x\,(\sin x - 1) = 0, \\ &2\sin x\,(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x) \cdot (\sin x - 1) = 0, \\ &(1 - \sin x)\,[2\sin x\,(1 + \sin x) - (1 - 2\sin^2 x)] = 0. \end{aligned}$$

Budući da je $0 < \sin x = \sin 18° < 1$, slijedi da je

$$2\sin x + 2\sin^2 x - 1 + 2\sin^2 x = 0$$

$$4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4},$$

to jest, zbog $\sin x > 0$, $\sin x = \frac{\sqrt{5} \cdot 1}{4}$. Konačno je $b = 2\sin 18°$, $b = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, to jest $|AC| = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Time je zadatak riješen u potpunosti.

Na kraju, umjesto zaključka, nekoliko pitanja. Čitatelju se prepušta da na temelju vlastitih odgovora donese zaključke.

- Ovaj zadatak je samo manji dio jednog pisanog ispita na maturi u Italiji. Kakav bi uspjeh postigli naši učenici, i to samo oni iz matematičko-prirodoslovnih gimnazija ako bi im cijeli ispit iz matematike bio samo ovaj zadatak?
- Ima li u samom tekstu zadataka, kao i u ponuđenim rješenjima, sadržaja koji su izvan okvira srednjoškolskog programa iz matematike (na primjer za opće gimnazije) u Hrvatskoj?
- Pretpostavljam da znam kako ste (barem većina) odgovorili na ova dva pitanja. Kako uskladiti ta dva vaša odgovora?
- Je li nešto trulo u državi Danskoj? Na ovo pitanje sam odgovaram: Nije! Vidio sam i zadatke s mature u Danskoj.

Završavam jednom vlastitom mišlju kojom sam često odgovarao na učeničke primjedbe da je neki ispit bio "težak": "U matematici nema teških stvari. Postoje one koje znamo i one koje ne znamo. One koje ne znamo proglašujemo teškima." Kada ovo ne bude "teško", moći ćemo s ponosom, ne samo reći, nego i s razlogom zapjevati maturantsku himnu GAUDEAMUS IGITUR... (Radujmo se dakle...)