Hugo Steinhaus:
Tri od sto...

Dragi MiŠ-ovci, upravo je u *Elementovoj* biblioteci *Elementarna matematika* objavljen prijevod poznate knjige dr. Huga Steinhausa, **Sto problema elementarne matematike**. Velika je zasluga ove zbirke profesora Steinhausa da su problemi vrhunski, i ne mogu se drugdje pronaći. Navedeni problemi često imaju elegantna, ponekad potpuno neočekivana rješenja. Za vas sam odabrala tri zanimljiva zadatka, nadam se da će vam se svidjeti.

Sandra Gračan

Iz predgovora...

Hugo Dionizy Steinhaus je rođen 1887. godine u Jaslama, u Poljskoj, a studirao je matematiku na *Göttingen Universität* u Njemačkoj, gdje je doktorirao. Umro je 1972. godine u Wroclawu u Poljskoj, kao profesor *emeritus* na *Uniwerszitet Wroclawski*. Objavio je preko 150 radova iz teorijske i primijenjene matematike, bio je urednik matematičkih časopisa te je primio mnoge nagrade za svoj rad.Cijeli se život bavio rekreativnom matematikom. U predgovoru prvog izdanja knjige *Mathematical Snapshots* napisao je da su trikovi i slučajan raspored u knjizi osmišljeni kako bi se svidjela “znanstveniku u djetetu i djetetu u znanstveniku”. “Možda sam”, zaključuje Steinhaus, “uspio zabaviti samo sebe”. Isti duh zaigranosti provlači se i ovom malom knjigom matematičkih problema.

Sat s dvjema jednakim kazaljkama

Znamo da prilikom određivanja vremena bez sata nitko ne pogriješi za više od šest sati.

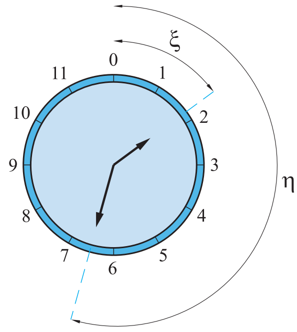
Urar je na sat stavio dvije kazaljke jednakih duljina, pa je bilo nemoguće razlikovati kazaljku za minute od kazaljke za sate. Kolika je najveća pogreška koju može napraviti vlasnik tog sata?

Rješenje

Dobro je poznato kako je vrijeme koje pokazuje sat s kazaljkama potpuno određeno položajem male kazaljke (slika 1). Velika kazaljka ima sporednu ulogu jer ona, zajedno sa skalom na licu sata, tvori sustav koji omogućava veću točnost očitavanja vremena i preciznije kretanje male kazaljke. Označimo li koordinatu male kazaljke s ξ, a koordinatu velike kazaljke s η, imamo

$$\eta - 12\{\xi\} = 0, \quad 0 \le \xi < 12, \quad 0 \le \eta < 12,$$

gdje $\{\xi\}$ označava decimalni dio broja ξ.



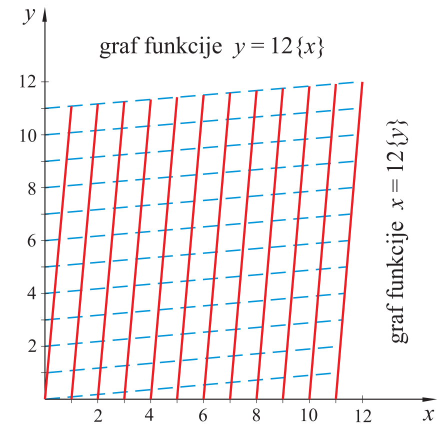
Slika 1.

Pretpostavimo da su obje kazaljke sata jednako duge. Označimo s x koordinatu jedne, a s y koordinatu druge kazaljke. Moguća su tri slučaja:

I) ako je $x - 12\{y\} \neq 0$, onda je $y - 12\{x\} = 0$;

II) ako je $y - 12\{x\} \neq 0$, onda je $x - 12\{y\} = 0$;

III) ako istovremeno vrijede jednakosti $y - 12\{x\} = 0$ i $x - 12\{y\} = 0$, tada ne znamo odrediti točno vrijeme jer svaka od kazaljki može pokazivati koliko je sati, vrijeme x jednako je vjerojatno kao i vrijeme y. Postoje 143 takva položaja kazaljki.



Slika 2.

Odgovarajući brojevi x i y koordinate su 143 točaka koje se dobiju kao presječne točke grafova funkcija $y = 12\{x\}$ i $x = 12\{y\}$ (slika 2). Te točke leže na 23 pravca zadana jednadžbama

$$y = x + \frac{12}{13}k, \quad (k = 0, \pm1, \ldots, \pm11). \qquad (1)$$

Označimo li s $r = |x - y|$ pogrešku koju činimo očitavajući vrijeme x umjesto y ili obratno, tada, prema jednadžbi (1), dobivamo

$$r = \frac{12}{13}|k|, \quad (k = 0, \pm1, \ldots, \pm11).$$

Odbacimo li, prema uvjetima zadatka, pogreške veće od 6 sati, tada za $k = \pm6$ dobivamo najveću pogrešku. Ona je

$$r = \frac{72}{13} = 5\frac{7}{13},$$

odnosno 5 sati, 32 minute i $18\frac{6}{13}$ sekundi. (U koje doba dana nam prijeti ta pogreška?)

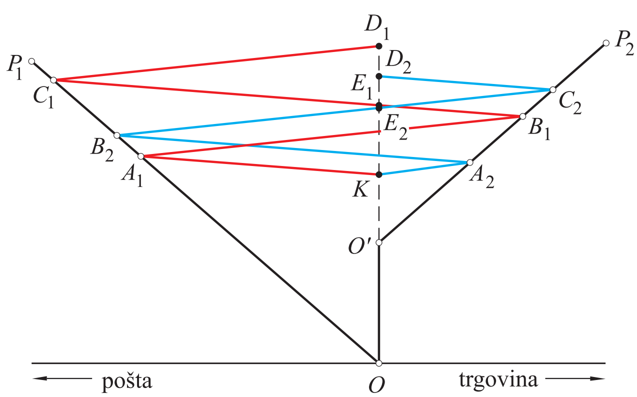
Jasno je da smo u našem razmatranju pretpostavili da vlasnik sata čita koordinate kazaljki bez greške.

Biciklist i pješaci

Upravitelj nekog imanja poslao je pješke dva kurira s pismima: jednog u poštu, a drugog, četvrt sata kasnije i u suprotnom smjeru, u trgovinu. Ubrzo je shvatio da je pomiješao pisma, pa je poslao biciklista da stigne oba kurira, ispravi pogrešku i vrati se. Biciklist je pretpostavio da oba kurira hodaju konstantnom brzinom i pitao se kojeg bi od njih trebao prvog loviti. S obzirom da može brzo voziti, u oba će slučaja ispuniti upraviteljevo naređenje.

Čitatelj koji rješava ovaj problem, trebao bi reći što bi bilo u slučaju da upravitelj nije zamijenio pisma, nego je samo zaboravio kuririma dati novac, pa je želio ispraviti tu pogrešku.

Rješenje



Slika 3.

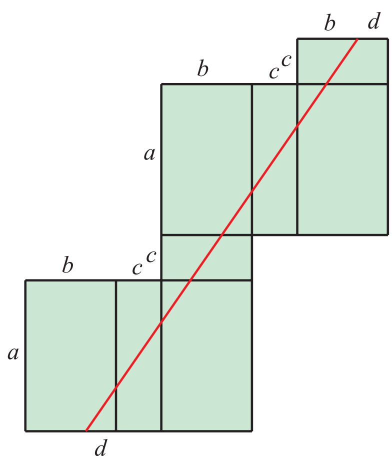
Označimo na vodoravnoj osi sa slike 3 s lijeve strane smjer prema pošti, a s desne strane smjer prema trgovini. Na okomitoj osi označimo vrijeme. Ravna crta OP_1 i izlomljena crta $OO'P_2$ predstavljaju put kurira. Krene li biciklist najprije za prvim kurirom, njegov put opisuje izlomljena ravna crta $KA_1B_1C_1D_1$, a krene li najprije za drugim, pa nakon toga za prvim, njegov put bit će crta $KA_2B_2C_2D_2$. Sa slike vidimo da bi biciklist trebao odabrati ovu drugu mogućnost. Isto pravilo vrijedi i u slučaju kad on mora kuririma samo dati novac, tj. kad njegov put završava u točkama E_1 ili E_2.

Vezanje kutija

U slastičarnicama prodavači vežu kutije slatkiša na sljedeći način: vrpca ide dijagonalno oko kutije i zatvara iskrivljeni osmerostranični lik. Na poklopcu i na dnu kutije vide se po dvije paralelne dužine. Znamo li dimenzije kutije, dokaži da je moguće izračunati duljinu vrpce i kutove pod kojima vrpca siječe strane. Konačno, dokaži da se svezana vrpca može, ne samo pomicati po kutiji, već i skinuti s nje bez rastezanja.

Rješenje

Na kutiji slatkiša u obliku kvadra iscrtamo trag ukrasne vrpce. Razrežemo li kutiju i razmotamo li njezine strane u ravninu, trag postane ravna crta (vidi sliku 4, dvije se strane kutije ponavljaju).



Slika 4.

Sa slike se lako vidi sljedeće:

(1) duljina vrpce je $2\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2}$,

(2) tangens kuta pod kojim vrpca siječe bridove jednak je $\frac{a+c}{b+c}$ ili $\frac{b+c}{a+c}$,

(3) vrpca se može skinuti s kutije bez rastezanja (na slici 4 to bi se dogodilo paralelnim pomicanjem),

(4) duljina vrpce bit će najmanja ako svakom od najvećih strana kutije prolaze dvije paralelne dužine.

Dakle, ako je $c < a$ i $c < b$, gdje je c visina kutije, te strane su dno i poklopac kutije.