Dijeljenje polinoma
i Fibonaccijevi brojevi

Jens Carstensen,
Alija Muminagić, Danska

U ovom članku prikazujemo, kako na jedan ne baš uobičajen način, dokazujemo neka svojstva Fibonaccijevog niza (F_n).

Podijelimo $x^7 : (x^2 - x - 1)$. Imamo

$$
\begin{array}{l}
x^7 : (x^2 - x - 1) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 8 \\
\underline{-(x^7 - x^6 - x^5)} \\
\quad x^6 + x^5 \\
\quad \underline{-(x^6 - x^5 - x^4)} \\
\qquad 2x^5 + x^4 \\
\qquad \underline{-(2x^5 - 2x^4 - 2x^3)} \\
\qquad\quad 3x^4 + 2x^3 \\
\qquad\quad \underline{-(3x^4 - 3x^3 - 3x^2)} \\
\qquad\qquad 5x^3 + 3x^2 \\
\qquad\qquad \underline{-(5x^3 - 5x^2 - 5x)} \\
\qquad\qquad\quad 8x^2 + 5x \\
\qquad\qquad \underline{-(8x^2 - 8x - 8)} \\
\qquad\qquad\quad 13x + 8.
\end{array}
$$

Dakle

$$x^7 : (x^2 - x - 1) = (\underline{1} \cdot x^5 + \underline{1} \cdot x^4 + \underline{2} \cdot x^3 + \underline{3} \cdot x^2 + \underline{5} \cdot x + \underline{8}) + 13x + 8.$$

Prisjetimo se:

Niz prirodnih brojeva $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...$ nam je poznat. Članove ovog niza zovemo Fibonaccijevi brojevi, a n-ti član niza označavamo s F_n. Ovaj niz je u potpunosti određen rekurzivnom relacijom

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{1}$$

i početnim uvjetima $F_1 = 1, F_2 = 1$.

Nakon prisjećanja, shvatimo da vrijedi

$$x^n = (x^2 - x - 1) \cdot (F_1 x^{n-2} + F_2 x^{n-3} + F_3 x^{n-4} + \ldots + F_{n-2} x + F_{n-1}) + F_n x + F_{n-1}. \tag{2}$$

Lako pokazujemo da je (2) točno. Množenjem i primjenjujući (1).

Primjer 1.

Dokažite da je

$$F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Rješenje:

Uvrstimo u (2) $x = 1$. Slijedi

$1^n(1 - 1 - 1)(F_1 + F_2 + ... + F_{n-1}) + F_n$
$+ F_n - 1 \Leftrightarrow F_1 + F_2 + ... + F_{n-1}$
$= F_n + F_{n-1} - 1 \Leftrightarrow$ (zbog $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$)
$F_1 + F_2 + ... + F_{n-1} = F_{n+1} - 1 \Leftrightarrow$ (nakon dodavanja F_n na obje strane)
$F_1 + F_2 + ... + F_{n-1} + F_n = F_n + F_{n+1} - 1 \Leftrightarrow$ (zbog $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$)
$F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1.$

Primjer 2.

Dokažite da je

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \quad \text{(Cassinijev identitet).}$$

Rješenje:

Opet se prisjetimo: karakteristična jednadžba rekurzivne relacije (1) je $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ čija su rješenja $x_1 = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $x_2 = 1 - \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Broj ϕ se naziva omjer zlatnog veza. Uvrstimo li u (2) $x = \phi$, dobivamo

$$\phi^n = \phi\, F_n + F_{n-1} \qquad (3)$$

a uvrštavanjem $x = 1 - \phi$

$$(1 - \phi)^n = (1 - \phi)\, F_n + F_{n-1} \qquad (4)$$

Množenjem (3) i (4) dobivamo

$(\phi - \phi^2)^n = (\phi - \phi^2)\, F_n^2 + \phi\, F_n F_{n-1} + (1 - \phi)\, F_n F_{n-1} + F_{n-1}^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)$
$F_n^2 + \phi\, F_n F_{n-1} + F_n F_{n-1} - \phi\, F_n F_{n-1} + F_{n-1}^2 \Leftrightarrow (-1)^n = -F_n^2 + F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) \Leftrightarrow (-1)^n = -F_n^2 + F_{n-1} \cdot F_{n+1}$ (jer je $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = -1$ i $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$).

Primjer 3.

Dokažite da je

$$F_{m+n-1} = F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1},\ m, n \geq 2 \qquad (5)$$

Rješenje:

Uvrstimo li u (2) $x = \phi$, dobivamo

$\phi^n = \phi F_n + F_{n-1}$ i obično
$\phi^m = \phi\ F_m + F_{m-1}$ i $\phi^{m+n} = \phi\, F_{m+n} + F_{m+n-1}$
zbog $\phi^{m+n} = \phi^m \cdot \phi^n$ je
$\phi\, F_{m+n} + F_{m+n-1} = (\phi\, F_m + F_{m-1})\,(\phi\, F_n + F_{n-1})$
$= \phi^2\, F_m \cdot F_n + \phi\, F_m \cdot F_{n-1} + \phi\, F_{m-1} F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1}$
(zbog $\phi^2 = \phi + 1$) $= (\phi + 1)\, F_m \cdot F_n + \phi F_m \cdot F_{n-1}$
$+ \phi\, F_{m-1}\, F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1} \Leftrightarrow F_{m+n-1} + \phi\, F_{m+n}$
$= \phi\, F_m \cdot F_n + F_m \cdot F_n + \phi\, F_m \cdot F_{n-1} + \phi\, F_{m-1}\, F_n$
$+ F_{m-1} \cdot F_{n-1} \Leftrightarrow F_{m+n-1} + \phi\, F_{m+n}$
$= (F_m \cdot F_n + F_m \cdot F_{n-1} + F_{m-1} \cdot F_n)\, \phi$
$+ F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1}$ (i zbog ϕ je iracionalan broj), uspoređivanjem koeficijenata slijedi

$$F_{m+n-1} = F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1}.$$

Pokušajte dokazati da je:

1. $F_1 - F_2 + F_3 - ... - F_{2k-2} + F_{2k-1} = 1 + F_{2k-2}$

   (uvrstite u (2) da je $x = -1$ i uzmite da je $n = 2k$).

2. $F_{2n} = F_{n+1} F_n + F_n \cdot F_{n-1}$

   (uvrstite u (5) $m = n + 1$).

3. $F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$.

LITERATURA

[1] Abbas Foohol Amini, *Fibonacci Numbers from a long Division Formula,* Mathematical Spectrum, Vol. 40, 2007/2008, Number 2.