Jedan zanimljiv zadatak

Mirjana Muštra, Zagreb

Na Državnom natjecanju mladih matematičara održanom na Krku u svibnju 2007. u sedmom je razredu zadan sljedeći zadatak:

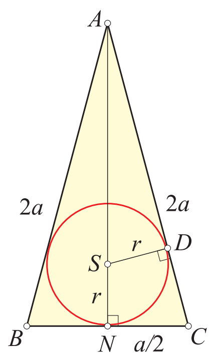
Duljina kraka jednakokračnog trokuta dvostruko je veća od duljine osnovice. Izračunaj polumjer tom trokutu upisane kružnice ako je duljina visine na osnovicu 4 *cm.*

Stručno povjerenstvo očekivalo je da će natjecatelji vrlo uspješno riješiti zadatak. Međutim, ispostavilo se da je taj zadatak bio odlučujući u rangiranju natjecatelja pri vrhu ljestvice. Naime, od 43 učenika koji su pristupili natjecanju, samo je šestoro u potpunosti riješilo zadatak (10 bodova), dvojica su imali ideju koja ih je mogla dovesti do točnog rješenja, ali su napravili greške u računanju (8 i 6 bodova). Petoro učenika je imalo dobru početnu ideju, međutim nisu je uspješno razradili do kraja. Većina preostalih učenika su za skicu dobili po 1 ili 2 boda. Natjecatelji su na tom zadatku osvojili 115 bodova (od 430 mogućih) što iznosi 26.74 %.

Povjerenstvo je predvidjelo sljedeći način rješavanja zadatka i bilo je uvjerenja da će većina učenika na taj način riješiti zadatak.

1. rješenje: sličnost - prijedlog stručnog povjerenstva (nijedan učenik nije riješio zadatak na ovaj način!).

Neka je N nožište visine iz vrha nasuprot osnovici jednakokračnog trokuta ABC, a S središte trokutu upisane kružnice. Točka D je nožište okomice iz točke S na krak $\overline{AC}$ trokuta. Jasno je da je $|SD|=|SN|=r$. Ako je duljina visine iz vrha A $|AN|=4$ cm, lako je zaključiti da je $|AS|=4-r$.



Trokut ANC je sličan trokutu ADS (pravokutni trokuti s jednim zajedničkim kutom koji nije pravi) pa vrijedi sljedeći razmjer

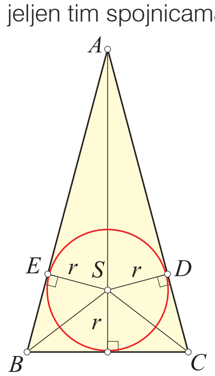
$$|NC| : |AC| = |SD| : |AS|$$
$$0.5a : 2a = r : (4\text{-}r)$$
$$r : (4\text{-}r) = 0.25$$
$$r = 0.8 \text{ cm}.$$

Rješenje je malo modificirano u odnosu na prijedlog Državnog povjerenstva. Pogledajmo kako su sve djeca rješavala zadani problem.

2. rješenje: formula za površinu trokuta

(riješilo troje učenika).

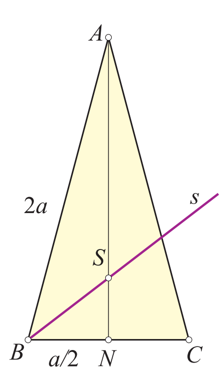
Iz središta trokutu upisane kružnice spuštene su okomice na stranice trokuta ABC. Povučene su spojnice vrhova trokuta sa središtem trokutu upisane kružnice: $\overline{AS}$, $\overline{BS}$ i $\overline{CS}$. Trokut ABC je podijeljen tim spojnicama na tri trokuta ΔBCS, ΔCAS i ΔABS. Slijedi:



$$P(\Delta ABC) = P(\Delta BCS) + P(\Delta CAS) + P(\Delta ABS)$$
$$\frac{a \cdot 4}{2} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{2a \cdot r}{2} + \frac{2a \cdot r}{2}$$
$$2a = \frac{a \cdot r}{2} + a \cdot r + a \cdot r$$
$$4 = r + 4r$$
$$5r = 4$$
$$r = 0.8 \text{ cm}.$$

3. rješenje: poučak o simetrali kuta trokuta

(riješio jedan učenik).



Na ΔABN primijenimo poučak o simetrali kuta trokuta koji glasi:

"Duljine dviju stranica u trokutu u istom su omjeru kao i duljine odgovarajućih odsječaka na koje simetrala kuta, što ga zatvaraju te dvije stranice, dijeli treću stranicu."

Simetrala kuta ABN siječe visinu $\overline{AN}$ u točki S koja je središte trokutu upisane kružnice. Prema oznakama sa skice vrijedi razmjer:

$$|AS| : |SN| = 2a : 0.5a = 4$$
$$|AS| = 4\,|SN|$$
$$4 - r = 4r$$
$$5r = 4$$
$$r = 0.8 \text{ cm}.$$

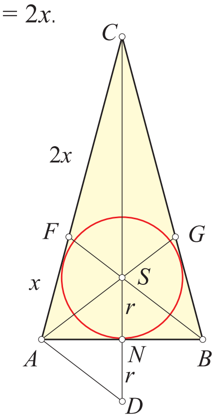
4. rješenje: nadopuna i sličnost trokuta

(rješavao jedan učenik, ali je pogriješio prilikom računanja omjera).

Nacrtana je simetrala kuta ABC koja siječe visinu $\overline{CN}$ trokuta u točki S, a stranicu $\overline{AC}$ u točki F. Vrhom trokuta A povučena je paralela s prije nacrtanom simetralom i produžena je visina trokuta $\overline{CN}$. Paralela i produžetak visine sijeku se u točki D.

Promotrimo pravokutne trokute ΔANS i ΔAND. Oni su sukladni jer je $\overline{AN}$ zajednička stranica, $\sphericalangle ANS = \sphericalangle AND = 90°$, $\sphericalangle NAD = \sphericalangle NBS = \sphericalangle NAS$ (kutovi uz presječnicu).

Primijenimo *poučak o simetrali kuta* na trokut ABC (kut ABC i njegova simetrala)! Jednostavno je zaključiti da je $|AF| = x$ i $|FC| = 2x$.



Nadalje, uočimo da je trokut CSF sličan trokutu CDA. Iz te sličnosti proizlazi omjer:

$$|CS| : |CD| = |CF| : |CA|.$$

Dalje nakon uvrštavanja slijedi:

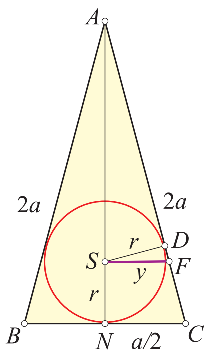
$$(4\text{-}r) : (4+r) = (2x) : (3x)$$
$$3\,(4\text{-}r) = 2\,(4+r)$$
$$r = 0.8 \text{ cm}.$$

5. rješenje: sličnost trokuta

(riješio jedan učenik).

Središtem trokutu upisane kružnice S povučena je paralela s osnovicom trokuta koja siječe krak trokuta AC u točki F. Znači: $SF \parallel BC$, $SF \perp AN$. Uočimo slične pravokutne trokute ΔANC i ΔSDF ($\sphericalangle FSD$ i $\sphericalangle NAC$ su kutovi s okomitim kracima,

$\measuredangle SFD$ i $\measuredangle NCA$ su kutovi uz presječnicu). Iz te sličnosti slijedi omjer:



$$|SD| : |AN| = |SF| : |AC|$$
$$r : 4 = y : (2a)$$
$$4y = 2ar \Rightarrow y = 0.5\ ar$$

Također, trokuti ΔASF i ΔANC su slični što je očito. Slijedi omjer:

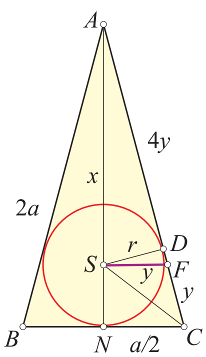
$$|AS| : |AN| = |SF| : |NC|$$
$$(4 - r) : 4 = y : (0.5a)$$
$$(0.5a)\ (4 - r) = 4y$$
$$r = 0.8 \text{ cm}.$$

6. rješenje (riješio jedan učenik).

Početna skica prilikom ovog načina rješavanja slična je skici iz prethodnog primjera uz mali dodatak.

Proučavajući pravokutni trapez $NCFS$ lako se uoči da je $|\measuredangle NCS| = |\measuredangle CSF| = |\measuredangle SCF|$ iz čega slijedi zaključak da je trokut CSF jednakokračan, odnosno $|SF| = |FC| = y$.

Također, $\Delta\ ASF \sim \Delta\ ANC$ pa slijedi omjer



$$|SF| : |NC| = |AF| : |AC|$$
$$y : (0.5a) = |AF| : (2a)$$

pa je jasno da je $|AF| = 4y$.

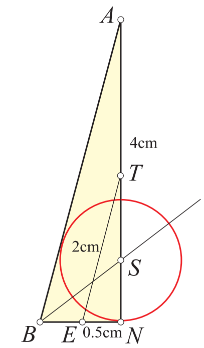
Vrijedi i sljedeći omjer

$$|AS| : |AN| = |AF| : |AC|$$
$$x : 4 = (4y) : (5y)$$
$$5x = 16$$
$$x = 3.2 \text{ cm}$$
$$r = 4 - 3.2 = 0.8 \text{ cm}.$$

***

Zgodno je prikazati još jedan način rješavanja zadatka prilikom kojeg je natjecateljica pokazala da razumije ovaj dio matematike, ali i snalažljivost. Nacrtala je skicu sa svim elementima potrebnim za pravilno zaključivanje, konstruirala je trokut, konstrukciju obrazložila, ali je duljinu polumjera dobila **mjerenjem** (a ne računanjem kako piše u zadatku).

7. rješenje.



Nacrta se dužina $\overline{AN}$ duljine 4 cm. U točki N konstruira se okomica na tu dužinu. Zatim se konstruira trokut NTE tako da je stranica $\overline{NE}$ duljine 0.5 cm, a stranica $\overline{ET}$ mora biti prema uvjetima zadatka 4 puta dulja tj. 2 cm. Lagano je sada konstruirati trokut ABN prenošenjem vrha kuta NTE u točku A i produljivanjem dužine $\overline{NE}$. Slijedi konstrukcija simetrale kuta ΔABN s vrhom u točki B, dobiva se središte upisane kružnice S i **mjeri** polumjer upisane kružnice $r = 0.8$ cm!

***

Pokušajmo sada poopćiti zadatak, odnosno pokušajmo odrediti pravilo po kojem bi se moglo doći do rješenja u općenitom slučaju. Tada bi zadatak glasio ovako:

Duljina kraka jednakokračnog trokuta n ($n \in \mathbf{N}$) puta je veća od duljine osnovice. Izračunaj polumjer tom trokutu upisane kružnice ako je duljina visine na osnovicu m ($m > 0$) cm.

Uočavamo slične trokute ΔASD i ΔANC (vidjeti skicu iz 1. predloženog rješenja). Slijedi razmjer:

$$|NC| : |AC| = |AN| : |AS|$$
$$0.5a : na = r : (m - r)$$
$$r \cdot na = 0.5a \cdot (m - r)$$
$$2\ r \cdot n = m - r$$
$$r \cdot (2n + 1) = m$$
$$r = \frac{m}{2n+1}.$$

***

Na ovom jednostavnom zadatku imali smo opet priliku uvjeriti se u ljepotu, vrijednost i raznolikost matematike, ali i u korist od natjecanja iz matematike na kojima i učenici i učitelji stalno stječu nova iskustva i novi poticaj za rad. Koji učitelj neće osjetiti posebno oduševljenje kad vidi na koliko su različitih načina natjecatelji došli do rješenja zadatka?

Drugo područno natjecanje u rješavanju matematičkih mozgalica SUDOKU

U Zrakoplovnoj tehničkoj školi Rudolfa Perešina u Velikoj Gorici, 12. prosinca 2007. godine, održano je drugo područno natjecanje u rješavanju matematičkih mozgalica SUDOKU. Sudjelovalo je 50 učenika iz 9 škola. (Na prvom natjecanju sudjelovao je 21 učenik iz 5 škola.)

Ravnateljica, Draženka Kovačević, organizirala je prijevoz učenika do same škole i dočekala nas s kolačima i riječima dobrodošlice.

U 11 sati i 10 minuta započelo je natjecanje i trajalo je 90 minuta. Učenici su rješavali tri sudoku slagalice: **squiggly**: srednje razine, **običnu**: teže razine i **samuraj** sudoku: srednje razine (zadatak pogledajte na 144. stranici). Natjecanje je prošlo u redu, bez problema i pritužbi.

Nakon natjecateljskog dijela, predviđen je obilazak zračne luke, ali zbog vremenskih uvjeta to se, nažalost, nije dogodilo. Učenicima je ponuđeno korištenje informatičke učionice ili gledanje *stand-up* komičara. Za to vrijeme su mentori, profesori u pratnji učenika, ispravljali riješene zadatke.

Poslije obveznog dijela poslužen nam je kvalitetan i obilan ručak. Nakon ručka su objavljeni neslužbeni rezultati, na koje nije bilo žalbi, tako da je oko 15 sati bilo proglašenje pobjednika.

			2	7		5		
			3		7	6		
	9	1		8		3	2	
9	6							
	8		9	3	5		6	
							7	9
	4	9		5		8	1	
		3	1		9			
		8		1	4			

Squiggly sudoku – srednja razina

			7				8	
	8		6	9				
		5				9		6
5			1					8
	3		5		2		7	
2					4			9
1		6				8		
				8	6		2	
	4				5			

Zla mozgalica

Ravnateljica je svim natjecateljima predala pohvalnice, a pobjednicima nagrade i priznanja. Naravno nije zaboravila ni mentore, koji su uz zahvalnice dobili i lijepe prigodne poklone. Pobjednica natjecanja je Ivana Dobrenić, učenica Tehničke škole „Ruđer Bošković“, koja je osvojila svih 130 bodova, a na drugom mjestu je Šimun Čanić, učenik XIII. gimnazije, s 97 bodova. Treće mjesto pripalo Andreju Knapiću, učeniku Zrakoplovne tehničke škole Rudolfa Perešina, s 94 boda.

Novost je, na drugom područnom natjecanju, da su se natjecanju pridružili i učenici (koji nisu iz Zagreba) Srednje škole "Ivan Švear" iz Ivanić Grada i Srednje škole Dugo Selo.

Zahvaljujući grupi entuzijasta i zaljubljenika u rješavanje sudoku slagalica, ovo će se natjecanje nastaviti i iduće će godine biti održano u XIII. gimnaziji u Zagrebu. S obzirom da je vremenik natjecanja natrpan upravo u siječnju, natjecanje će se vjerojatno održati u studenom.

Nadamo se da će nam se iduće godine pridružiti i učenici osnovnih škola.

Snježana Šišić, Zagreb