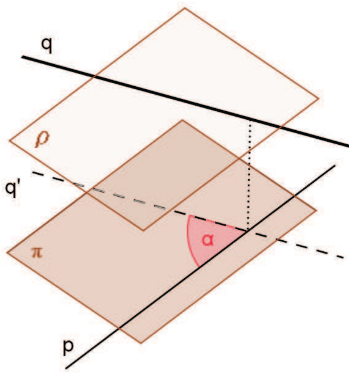
Kut između mimoilaznih pravaca

Ela Rac Marinić Kragić, Zagreb

U prošlom broju MiŠ-a bilo je govora o udaljenosti mimoilaznih pravaca. Kako je već napisano, *mimoilazni pravci su pravci koji ne leže u istoj ravnini*. Kako tada odrediti kut između mimoilaznih pravaca?

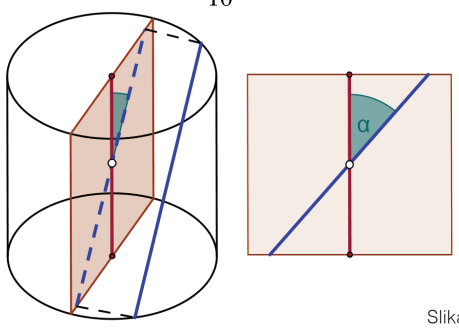
Mimoilazni pravci leže u paralelnim ravninama. Konstruirajmo dvije paralelne ravnine π i ρ u kojima leže mimoilazni pravci $p\,(p \in \pi)$ i $q\,(q \in \rho)$. Sada konstruirajmo ortogonalnu projekciju q' pravca q na ravninu π kojoj pripada pravac p. Kut između mimoilaznih pravaca p i q jednak je kutu između ortogonalne projekcije q' i pravca p (vidi sliku 1). Primijetimo da se translacijom bilo kojeg od pravaca za bilo koji vektor kut između mimoilaznih pravaca neće promijeniti.



Slika 1.

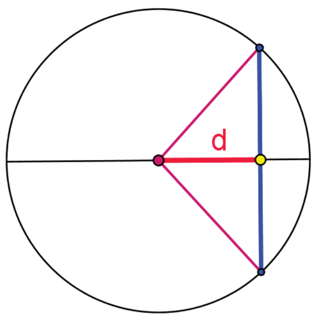
Primjer 1. Visina uspravnog valjka jednaka je 16 cm, a polumjer osnovke je 10 cm. Dužini duljine 20 cm jedan je kraj na rubu donje, a drugi kraj na rubu gornje osnovke. Koliki kut zatvara ta dužina s osi valjka? A koliko je udaljena od osi?

Rješenje: Duljina polumjera osnovke neće utjecati na veličinu traženog kuta već samo na udaljenost dužine od osi (zašto?). Kako bismo odredili kut između dužine i osi valjka trebamo naći ortogonalnu projekciju te dužine na osni presjek valjka (vidi sliku 2). Slijedi $\cos\alpha = \frac{8}{10}$, $\alpha \approx 36^\circ 52' 12''$.



Slika 2.

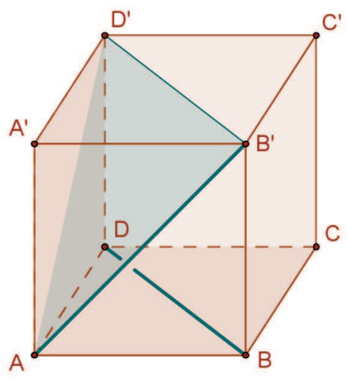
Udaljenost možemo odrediti tako da nađemo ortogonalne projekcije osi valjka i dužine na osnovku (vidi MiŠ broj 41). Ortogonalna projekcija osi je točka (središte baze valjka), a ortogonalna projekcija dužine bit će dužina (tetiva osnovke čija je duljina $\sqrt{20^2-16^2}=12$). Udaljenost središta baze od te tetive je tražena udaljenost (vidi sliku 3) i iznosi $\sqrt{10^2-6^2}=8$.



Slika 3.

Primjer 2. Nađite kut između dvije mimoilazne plošne dijagonale dviju susjednih strana kocke.

Rješenje: Promatrajmo dijagonale $\overline{AB'}$ i $\overline{BD}$ kocke $ABCDA'B'C'D'$. Kako je $B'D' \parallel BD$, traženi kut bit će jednak kutu $AB'D'$. Trokut $AB'D'$ je jednakostraničan pa je traženi kut 60°.



Slika 4.

Kod zadataka određivanja kuta između pravaca, pa tako i mimoilaznih pravaca, korisno je upotrijebiti skalarni produkt vektora. Osnova takve metode rješavanja leži u činjenici da u prostoru uvijek možemo odrediti pogodnu vektorsku bazu. Sastavimo tablicu skalarnih produkata vektora te baze. Zatim vektore smjera zadanih pravaca rastavimo na komponente kolinearne s vektorima baze te lako odredimo kut prema formuli

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

gdje su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori smjera zadanih pravaca.

Primjer 3. Zadana je pravilna trostrana uspravna prizma $ABCA_1B_1C_1$. Neka je a duljina osnovnog brida, a točke O, O_1 neka su središta donje i gornje osnovke. Duljina ortogonalne projekcije dužine $\overline{AO_1}$ na pravac B_1O iznosi $\frac{5a}{6}$. Odredite kut između dužine $\overline{AO_1}$ i $\overline{B_1O}$, te visinu prizme.

Rješenje: Za vektore baze izaberimo vektore $\overrightarrow{AA_1}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{n}$ i $\overrightarrow{AC}=\vec{p}$ (slika 5). Označimo $m=|\vec{m}|$. Sastavimo tablicu skalarnih umnožaka vektora baze.

$\cdot$	$\vec{m}$	$\vec{n}$	$\vec{p}$
$\vec{m}$	m^2	0	0
$\vec{n}$	0	a^2	$\frac{a^2}{2}$
$\vec{p}$	0	$\frac{a^2}{2}$	a^2

Prikažimo sada vektore $\overrightarrow{AO_1}$ i $\overrightarrow{B_1O}$ kao linearnu kombinaciju vektora baze (rastavimo ih na komponente). Vrijedi:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO_1} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC_1}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\vec{m}+\vec{m}+\vec{n}+\vec{m}+\vec{p}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(3\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1O} &= \overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB_1}\\ &= \frac{1}{3}\left(\vec{n}+\vec{p}\right)-\left(\vec{m}+\vec{n}\right)=\frac{1}{3}\left(-3\vec{m}-2\vec{n}+\vec{p}\right).\end{aligned}$$

Koristeći tablicu dobivamo

$$\left|\overrightarrow{AO_1}\right| = \left|\overrightarrow{B_1O}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{9m^2+3a^2},$$

$$\overrightarrow{AO_1}\cdot\overrightarrow{B_1O} = -\frac{1}{6}\left(6m^2+a^2\right),$$

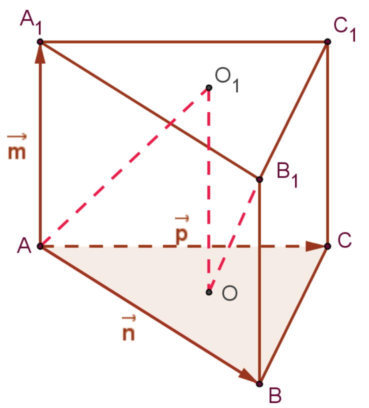
$$\cos\varphi = \frac{6m^2 + a^2}{2\left(3m^2 + a^2\right)}.$$

Kako ortogonalna projekcija dužine $\overline{AO_1}$ na pravac B_1O iznosi $\frac{5a}{6}$, znači da je $|\overrightarrow{AO_1}|\cdot\cos\varphi = \frac{5a}{6}$.

Dobiva se jednakost

$$\frac{\sqrt{9m^2+3a^2}\left(6m^2+a^2\right)}{6\left(3m^2+a^2\right)} = \frac{5a}{6}.$$

Odatle je $m = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $\cos\varphi = \frac{5}{6}$.



Slika 5.

Primjer 4. Osnovka trostrane piramide $ABCV$ jednakostraničan je trokut stranice $4\sqrt{2}$. Bočni brid $\overline{CV}$ duljine 2 okomit je na ravninu osnovke. Odredite kut i udaljenost između mimoilaznih pravaca VM i CN, pri čemu je M polovište brida $\overline{BC}$ a N polovište brida $\overline{AB}$.

Rješenje: Za vektore baze uvodimo vektore $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{CV}$. Sastavimo tablicu skalarnih umnožaka vektora baze.

$\cdot$	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	32	16	0
$\vec{b}$	16	32	0
$\vec{c}$	0	0	4

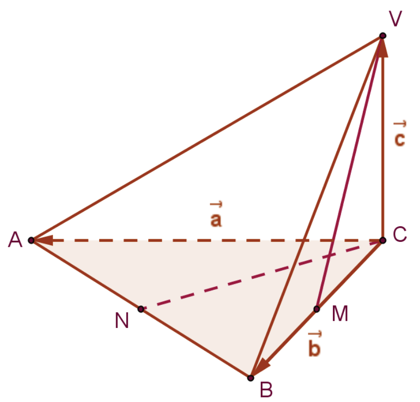
$$\overrightarrow{VM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CV} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - 2\vec{c}\right),$$

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right), \qquad \overrightarrow{VN} = \overrightarrow{CN} - \vec{c} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) - \vec{c},$$

$\overrightarrow{VM}\cdot\overrightarrow{VN} = 12$, $\left|\overrightarrow{VM}\right| = 2\sqrt{3}$, $\left|\overrightarrow{CN}\right| = 2\sqrt{6}$. Iz toga izlazi $\cos\varphi = \frac{12}{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi = 45^\circ$.

Izračunajmo još udaljenost između pravaca VM i CN, tj. duljinu njihove zajedničke okomice PQ, $\left(P \in VM, Q \in CN\right)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= x\overrightarrow{VM} + y\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{VC}\\ &= \frac{x}{2}\left(\vec{b} - 2\vec{c}\right) + \frac{y}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) - \vec{c}\\ &= \frac{1}{2}\left(y\vec{a} + (x+y)\vec{b} - (2x+2)\vec{c}\right).\end{aligned}$$



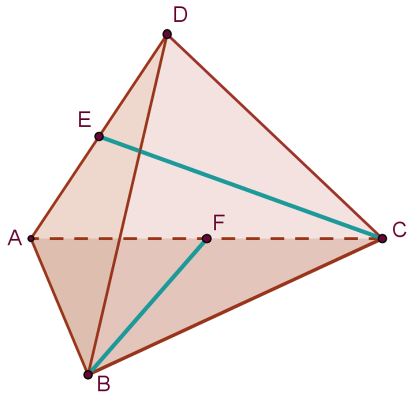
Slika 6.

Iz uvjeta okomitosti vektora $\overrightarrow{PQ}$ na vektore $\vec{b} - 2\vec{c}$ na $\vec{a}+\vec{b}$ dobivamo sustav jednadžbi: $3x + 3y = -1$, $x + 2y = 0$, odakle je $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{6}\left(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}\right)$, odnosno

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{1}{6}\sqrt{\left(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Primjer 5. U pravilnom tetraedru $ABCD$ neka je točka E polovište od $\overline{AD}$ i F polovište od $\overline{AC}$. Odredite kosinus kuta između mimoilaznih pravaca EC i BF. Konstruirajte paralelne ravnine kojima pripadaju mimoilazni pravci EC i BF.

Rješenje:



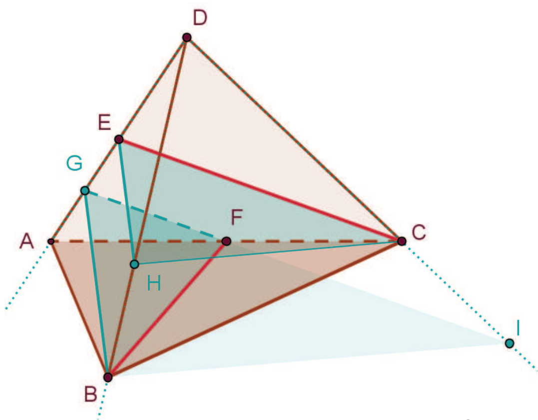
Slika 7.

Izaberimo u vektorsku bazu vektore $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ i $\overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{EC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC},$$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{EC}}{\left|\overrightarrow{BF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{EC}\right|} = \frac{1}{6}.$$

Ako dvije paralelne ravnine presiječemo trećom ravninom pod bilo kojim kutom, tada će presječni pravci koji pritom nastaju biti također paralelni. To znači da i dužine koje se nalaze u presjeku tih dviju ravnina s bočnim stranama tetraedra moraju biti međusobno paralelne (slika 8).



Slika 8.

Lako konstruiramo dužinu $\overline{FG} \parallel \overline{CE}$ $|AG| = \frac{1}{4}|AD|$ (zbog sličnosti trokuta). Sada konstruirajmo dužinu $\overline{EH} \parallel \overline{GB}$. Opet zbog sličnosti trokuta GBD i EHD ($|DE|:|DG| = 2:3$) zaključujemo da je $|DH| = \frac{2}{3}|DB|$ tj. $|BH| = \frac{1}{3}|DB|$.Tako smo dobili paralelne ravnine BFG i HCE. Primijetimo da trokut GBI nastaje homotetičnim preslikavanjem trokuta EHC s koeficijentom homotetije 1.5, pri čemu je vrh D tetraedra središte homotetije.

Zadaci za vježbu

1. U pravilnom tetraedru $ABCD$ točka M je polovište brida $\overline{AD}$, točka N polovište brida $\overline{AB}$ i točka K polovište brida $\overline{CD}$. Točka O je središte osnovke. Odredite kut i udaljenost među pravcima MO i KN.
2. Zadana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Neka je P polovište brida $\overline{DD_1}$. Nađite kut i udaljenost između pravaca CP i A_1D.
3. U prostoru su dane točke $A(2,1,3)$, $B(3,1,5)$, $C(3,3,1)$, $D(3,0,-2)$. Nađite kut između mimoilaznih pravaca AB i CD.

LITERATURA

[1] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3 – Analitička geometrija*, Element, Zagreb, 1999.

[2] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2 – Udžbenik i zbirka zadataka za 2 razred gimnazije*, Element, Zagreb, 2006.