Pierre Gustave Lejeune Dirichlet i njegov princip

Zdravko Kurnik, Zagreb

Ove se godine navršilo **200** godina od rođenja velikog njemačkog matematičara francuskog podrijetla Pierrea Gustavea Lejeunea Dirichleta. Dirichlet je u školskoj matematici poznat po jednostavnom principu koji nosi njegovo ime. Ova velika godišnjica prilika je da nešto više saznamo o ovom matematičaru i njegovom djelu.

Život i djelo

Rođen je 13. veljače 1805. godine u njemačkom gradu Dürenu, koji je u to doba pripadao francuskom kraljevstvu. Obitelj je došla iz belgijskog grada Richeleta. To objašnjava porijeklo dijela njegova imena koje dolazi od naziva "Le jeune de Richelet" ("Mladi iz Richeleta"). Osim imena Pierre i Gustave u povijesnim izvorima ponekad se navode i njegova njemačka imena Peter i Gustav. Njegov otac je bio upravitelj pošte u Dürenu.

Još prije nego što je kao dvanaestogodišnjak 1817. krenuo u gimnaziju u Bonn, pokazivao je veliku sklonost za matematiku i svoj džeparac trošio je na kupnju matematičkih knjiga. Nakon dvije godine gimnazije u Bonnu po želji roditelja prešao je u jezuitski koledž u Kölnu. Tu je imao sreću da ga poučava veliki fizičar Ohm. Sa 16 godina Dirichlet je završio školovanje i bio spreman za upis na sveučilište. Kako u to vrijeme njemačka sveučilišta nisu imali visoke standarde, Dirichlet se odlučio za studij u Parizu.

Na put u Francusku ponio je sa sobom Gaussovo remek-djelo *Disquisitiones arithmeticae*, koje je uvijek bilo uz njega i koje je stalno proučavao. Slušao je predavanja na Collège de France i Faculté des Sciences. Tu su profesori bili mnogi vodeći francuski matematičari: Biot, Fourier, Francoeur, Hachette, Laplace, Lacroix, Legendre i Poisson. Dirichlet je mnogo profitirao iz kontakata s ovim velikanima.

Od 1822. – 1827. Dirichlet je bio privatni učitelj u Parizu.

Godine 1825. Dirichlet se odlučio vratiti u Njemačku i nastaviti raditi na nekom sveučilištu. U tome ga je ohrabrivao glasoviti prirodoslovac Alexander von Humboldt. No, na putu povratka iskrsle su neke proceduralne prepreke (za rad bila je potrebna habilitacija, nije imao doktorat, nije znao latinski jezik). Sve je to ubrzano sređeno i Dirichlet se našao na Sveučilištu u Breslau. Od 1827. on poučava u Breslau u zvanju docenta. Međutim, nije bio zadovoljan. Pojavio se isti problem zbog kojega je i išao u Francusku: niski standardi.

Godine 1829. uz von Humboldtovu pomoć odlazi u Berlin. Poučava najprije kao docent, a od 1831. do 1855. profesor je Berlinskog sveučilišta. Odmah na početku ovog razdoblja oženio je Rebeču Mendelssohn, jednu od dvije sestre velikog skladatelja. Kasnije, u jesen 1843., pratio je bolesnog prijatelja Jacobija na oporavak u Italiju. Vratio se u proljeće 1845. Godine 1855. u Göttingenu je umro Gauss i na njegovo mjesto došao je Dirichlet. To je bila kruna njegovog životnog puta. Odgovarao mu je mirniji život u Göttingenu. Sada je imao više vremena za svoja istraživanja i neka naprednija istraživanja studenata. Ali ovakav novi život neće potrajati. U ljeto 1858., na jednoj konferenciji u Švicarskoj, pretrpio je srčani udar. U Göttingen se vratio s velikim teškoćama.

Umro je u Göttingenu 5. svibnja 1859. godine.

* * *

Iz Dirichletovog matematičkog djela izdvojit ćemo najvažnije doprinose.

1. Dirichletova znanstvena aktivnost počela je još za boravka u Francuskoj. Njegov prvi rad odnosio se na glasoviti Veliki Fermatov teorem da jednadžba $x^n + y^n = z^n$ nema rješenja u skupu prirodnih brojeva niti za jedan prirodni broj n veći od 2. Tvrdnju za $n = 3$ i $n = 4$ već je dokazao Euler. Dirichlet je napao slučaj $n = 5$. Tvrdnju je dokazao samo za prvi od dva moguća podslučaja (jedan od brojeva x, y, z je paran, drugi djeljiv s 5 i paran) i svoj je rad poslao Pariškoj Akademiji. Legendre, jedan od izvjestitelja, upotpunio je rad dokazom drugog podslučaja (jedan od brojeva x, y, z je paran i relativno prost s drugim koji je djeljiv s 5) i rad je objelodanjen u rujnu 1825. godine.

2. Dirichlet je prvi proveo strogu raspravu konvergencije Fourierovih redova u dva svoja rada iz 1829. i 1837. Presudnu ulogu u toj raspravi igra **Dirichletov integral**

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt, \qquad n \geq 0,$$

gdje n karakterizira odsječak Fourierova reda, a x je vrijednost argumenta za koju se ispituje konvergencija.

3. Dirichlet se smatra jednim od začetnikom algebarske teorije brojeva, a kao početak uzima se njegova rasprava iz 1837. U njoj dokazuje teorem

Ako su prvi član i razlika aritmetičkog niza relativno prosti prirodni brojevi, onda taj niz sadrži beskonačno prostih brojeva.

Tvrdnju je iskazao još Legendre 1788. godine. Dirichletov dokaz teorema veoma je složen i zasniva se na Dirichletovim redovima. Danas se taj teorem naziva **Dirichletov teorem.** Nedugo nakon prve rasprave objavljuje drugu (1838.) i treću (1839.) raspravu u kojima se uvode redovi oblika $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$. Ti se redovi nazivaju **Dirichletovi redovi**. Redovi se primjenjuju u analitičkoj teoriji brojeva, posebno u raspodjeli prostih brojeva u aritmetičkim nizovima i drugim nizovima prirodnih brojeva. Dirichlet je obogatio teoriju i kapitalnim djelom *Vorlesungen über Zahlentheorie* (*Predavanja iz teorije brojeva*), koje je publicirano poslije njegove smrti 1863.

4. Dirichlet je 1837. predložio modernu definiciju funkcije:

Ako se varijabla y prema varijabli x odnosi tako da kad god se odredi numerička vrijednost za x postoji pravilo prema kojem je određena jedinstvena vrijednost od y, onda je y funkcija od nezavisne varijable x.

5. Dirichletova funkcija. Dirichlet je našao primjer funkcije koja se ponaša toliko nepravilno da je nemoguće naći matematički izraz kojim bi se ona predočila. Ta funkcija nije neprekidna ni u jednoj točki. Evo njezine definicije:

Ako je x racionalan, neka je $y = c$, a ako je x iracionalan, neka je $y = d \neq c$.

6. Dirichletova zadaća. Traži se funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koja zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$$

unutar nekog područja G i granični uvjet

$$f(P) = g(P),$$

gdje je P rubna točka područja, a g zadana (obično neprekidna) funkcija na G.

Dirichletov princip

U rješavanju raznovrsnih problema, posebno pri dokazivanju postojanja postojanja objekata koji imaju neko određeno svojstvo, često je vrlo uspješna primjena jednog od najpoznatijih kombinatornih principa, koji je poznat pod raznim raznim popularnim nazivima kao što su *princip kutija*, *princip pretinaca*, *princip golubinjaka*, *problem zečeva i kaveza* i dr. Dirichlet ga je prvi jasno formulirao i dao mu precizan matematički smisao. Zato se taj princip danas naziva — **Dirichletov princip**.

Dirichletov princip može se formulirati na različite načine. Navodimo najčešće formulacije različitih oblika Dirichletovog principa:

Slaba forma

Ako $n+1$ zečeva rasporedimo bilo kako u n kaveza, onda su u barem jednom kavezu smještena barem 2 zeca.

Ako $n+1$ predmeta rasporedimo bilo kako u n praznih kutija (pretinaca), onda barem jedna kutija (pretinac) sadrži barem dva od tih predmeta.

Ako konačan skup S sa $n+1$ elemenata razdijelimo u najviše n disjunktnih podskupova $S_1, S_2, \ldots, S_m$, $(m \leq n)$, onda postoji podskup S_k s najmanje 2 elementa.

Za bilo koje preslikavanje $f : A \to B$ konačnog skupa A sa $n+1$ elemenata u konačni skup B sa n elemenata postoje 2 elementa skupa A koji imaju istu sliku.

Ovo su varijacije najjednostavnijeg oblika Dirichletovog principa. U njemu se govori o konačnim skupovima sa n i $n+1$ elemenata i postojanju 2 elementa s određenim svojstvom. Ovaj se oblik najčešće primjenjuje.

Tvrdnja je jednostavna i očigledna, pa je dokaz gotovo nepotreban. Međutim i sam dokaz je jednostavan: kad bi, na primjer, u svakome od n kaveza bio smješten najviše jedan zec, onda bi i zečeva bilo najviše n, a ima ih $n+1$. Kontradikcija!

Tvrdnja pogotovo vrijedi ako je broj zečeva, predmeta, odnosno elemenata skupa veći od $n+1$.

Primjer 1. Među 13 učenika uvijek postoje barem 2 učenika koji su rođeni u istom mjesecu.

Dokaz. Lako se uočava da treba povezati učenike i mjesece. To znači da su učenici – "zečevi", a mjeseci – "kavezi". Imamo 13 "zečeva" i 12 "kaveza". Izravna primjena Dirichletovog principa osigurava valjanost tvrdnje.

Općenitija forma

Ako $nk+1$ predmeta rasporedimo bilo kako u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži $k+1$ predmeta.

Tvrdnja pogotovo vrijedi ako je broj predmeta veći od $nk+1$. Slično se iskazuju drugi oblici poopćenja Dirichletovog principa.

Primjer 2. Dane su točke A, B, C, D, E i F od kojih nikoje tri ne leže na jednom pravcu. Te točke određuju 15 dužina, neke od njih obojene su plavom, a neke crvenom bojom. Dokažimo da postoji barem jedan trokut s vrhovima u skupu $\{A, B, C, D, E, F\}$ čije su sve stranice iste boje.

Dokaz. Promatrajmo 5 dužina kojima je A krajnja točka. Ovdje imamo 5 "predmeta" (dužine sa zajedničkom krajnjom točkom) i 2 "kutije" (boje). Budući da je $5 = 2 \cdot 2 + 1$, na temelju općenitije forme Dirichletovog principa proizlazi da su barem 3 dužine iste boje. Njihovi drugi krajevi spojeni su međusobno dužinama koje su ili sve druge boje, pa je to traženi trokut, ili je barem jedna boje uočene trojke dužina, pa s dvije od njih opet daje trokut iste boje.

* * *

Jaka forma

Ako m predmeta rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži $\left[\dfrac{m-1}{n}\right]+1$ predmeta.

Opća forma

Neka su n, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prirodni brojevi. Ako $p_1 + p_2 + \ldots + p_n - n + 1$ predmeta rasporedimo u n kutija $K_1, K_2, \ldots, K_n$, onda barem jedna kutija K_i sadrži barem p_i predmeta.

* * *

Dirichletov princip primjenjuje se u mnogim područjima matematike. Navodimo samo najvažnija: kombinatorika, teorija brojeva, nizovi, geometrija. Sam Dirichlet primjenjivao ga je u teoriji brojeva. Često se već iz formulacije zadatka može naslutiti da je nužna primjena Dirichletovog principa. Na to upućuju riječi kao što su "barem", "najmanje", "postoji". Ta činjenica ne umanjuje draž rješavanja takvog zadatka, ostaje još nekoliko zanimljivih koraka: raščlanjivanje, otkrivanje "zečeva" i "kaveza", "predmeta" i "kutija", poopćavanje i dr. Ponekad i nije sve od početka vidljivo i jasno, u što se čitatelj može uvjeriti razmatrajući izbor zadataka s naših natjecanja u kojima se primjenjuje Dirichletov princip.

Evo nekoliko takvih zadataka:

1. Neka je N prirodan broj. Dano je N trojki cijelih brojeva r_j, s_j, t_j, za $1 \le j \le N$, takvih da je barem jedan od njih neparan. Pokažite da postoje cijeli brojevi a, b, c takvi da je $ar_j + bs_j + ct_j$ neparan broj za barem $\frac{4N}{7}$ različitih indeksa j.
(Državno natjecanje 2001., II. razred)

Rješenje. Promatrajmo trojke (a, b, c), gdje su a, b, c brojevi jednaki 0 ili 1, ali barem jedan od njih nije jednak nuli. Takvih trojki ima 7.

Budući da za svaki j nisu svi brojevi r_j, s_j, t_j parni, lako se vidi da su tri od suma $ar_j + bs_j + ct_j$ parne, a četiri neparne. To znači da ima točno $4N$ neparnih suma. Prema Dirichletovom principu postoji trojka (a, b, c) za koju je barem $\frac{4N}{7}$ suma neparno.

2. Možemo li iz svakog deveteročlanog podskupa skupa prirodnih brojeva odabrati četiri različita elementa a, b, c, d tako da zbrojevi $a+b$ i $c+d$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 20?

(Državno natjecanje 1999., III. razred)

Rješenje. Dovoljno je promatrati ostatke pri dijeljenju tih brojeva s 20.

Ako u deveteročlanom podskupu postoje međusobno različiti prirodni brojevi a, b, c, d, tako da je $a \equiv c(\mod 20)$ i $b \equiv d(\mod 20)$, onda je $a+b \equiv c+d(\mod 20)$.

U suprotnom, najviše tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju s 20, dok su svi ostali ostaci međusobno različiti. Tada u promatranom deveteročlanom podskupu postoji barem 7 brojeva koji daju različite ostatke pri dijeljenju s 20. Dakle, pri dijeljenju s $\underline{20}$ imamo barem $\frac{7 \cdot 6}{2} = \underline{21}$ različiti par ostataka. Prema Dirichletovom principu zaključujemo da zbrojevi elemenata neka dva para daju isti ostatak pri dijeljenju s 20, tj. postoje brojevi a, b, c, d takvi da je $a+b \equiv c+d(\mod 20)$.

3. U konveksnom mnogokutu s 1998 stranica duljine stranica su prirodni brojevi. Opseg mnogokuta je 1 997 000. Dokažite da barem dvije stranice tog mnogokuta imaju jednake duljine.

(Općinsko natjecanje 1998., I. razred)

Rješenje. Promatrani 1998-terokut sa stranicama različitih cjelobrojnih duljina ima najmanji opseg ako su mu duljine 1, 2, 3,..., 1998. Taj je najmanji opseg jednak

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 1998 = \frac{1998 \cdot (1998+1)}{2} = 1\,997\,001.$$

Budući da je opseg promatranog mnogokuta 1 997 000, dakle <u>manji</u> od <u>najmanjeg</u> mogućeg, moraju prema Dirichletovom principu barem <u>dvije</u> stranice imati jednake duljine.

4. U koordinatnoj ravnini dano je pet točaka P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 s cjelobrojnim koordinatama. Pokažite da postoje barem dvije točke P_i, P_j za $i \ne j$ tako da pravac P_iP_j sadrži neku točku s cjelobrojnim koordinatama koja leži između P_i i P_j.

(Državno natjecanje 1994., III. razred)

Rješenje. Neka su dane točke $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Podijelimo ove točke u grupe prema parnosti njihovih koordinata. Postoje sljedeće mogućnosti: (parna, parna), (parna, neparna), (neparna, parna), (neparna, neparna). Dakle, postoje <u>četiri</u> mogućnosti za parnost koordinata <u>pet</u> danih točaka, pa prema Dirichletovom principu postoje barem dvije točke P_i, P_j kojima su prve i druge koordinate iste parnosti. Tada polovište P dužine $\overline{P_iP_j}$, $P(\frac{x_i+x_j}{2}, \frac{y_i+y_j}{2})$, ima cjelobrojne koordinate, jer su x_i+x_j i y_i+y_j parni brojevi.

5. Brojevi 1, 2 i 7 imaju sljedeće svojstvo: $1\cdot 2+2=2^2$, $1\cdot 7+2=3^2$, $2\cdot 7+2=4^2$. Dokažite da ne postoje četiri različita prirodna broja sa svojstvom da je umnožak svaka dva među njima uvećan za 2 jednak kvadratu nekoga prirodnog broja.

(Državno natjecanje 1992., III. razred)

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje takvi brojevi i označimo ih s a_1, a_2, a_3, a_4. Ako je neki od njih, na primjer a_1, djeljiv sa 4, tada je $a_1 a_i + 2$ oblika $4k+2$ za $i = 2, 3, 4$. Međutim, kvadrat cijelog broja ne može biti toga oblika, jer on pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 0 ili 1. Naime, kvadrat parnog broja djeljiv je sa 4 (ostatak je 0), a kvadrat neparnog broja je oblika $(2n+1)^2 = 4(n^2+1)+1$ (ostatak je 1).

Dakle, niti jedan od gornjih brojeva ne može biti djeljiv sa 4. To znači da svaki od njih pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 1, 2 ili 3. Imamo četiri točke i tri ostatka, stoga prema Dirichletovom principu moraju barem dva od tih brojeva, recimo a_1, a_2, pri dijeljenju sa 4 dati isti ostatak. Oni su tada oblika $4m+r$, $4n+r$, pa je

$$\begin{aligned} a_1\cdot a_2+2 &= (4m+r)(4n+r)+2 \\ &= 4(4mn+mr+nr)+r^2+2. \end{aligned}$$

Ovaj broj pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 2 ili 3, pa ne može biti kvadrat prirodnog broja.

* * *

Dirichletov princip ima za nastavu matematike dva važna svojstva: jednostavnost i očiglednost. Zato je njegova primjena moguća vrlo rano. Nije rijedak slučaj da se na natjecanjima iz matematike učenika osnovnih škola pojavljuju zadaci u kojima je moguća primjena Dirichletovog principa. Takvi zadaci pogoduju razvijanju logičkog mišljenja učenika, pa preporučujemo nastavnicima da se povremeno sjete "zečeva" i "kaveza".

Veći izbor zadataka s Dirichletovim principom čitatelj može naći u navedenoj literaturi.

Literatura

[1] I.L. Babinskaja, *Zadaci s ruskih matematičkih natjecanja* (prijevod s ruskog), Element, Zagreb,

[2] M. Bombardelli, A. Dujella, S. Slijepčević, *Matematička natjecanja učenika srednjih škola*, HMD, Zagreb, 1996.

[3] N.Elezović, *Odabrani zadaci elementarne matematike*, Element, Zagreb 1992.

[4] M. Krnić, *Dirichletovo pravilo*, HMD, Zagreb, 2001.

[5] Z. Kurnik, Dirichletov princip, *Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore* 2 (1993.), 9–16.

[6] D. Veljan, *Dirichletov princip i Ramseyeva teorija*, Matematika 3 (1983.), 26–42.

* * *

GAUSS I DIRICHLET

Dirichlet se divio Gaussu. Njegovo divljenje je bilo toliko da je spavao s Gaussovom knjigom "Disquisitiones Arithmeticae" pod jastukom. No divljenje je bilo uzajamno. "Broj njegovih publikacija nije velik," govorio je Gauss. "Ali dragulji se ne važu na trgovačkoj vagi. Malo, ali zrelo".

TELEGRAM

Dirichlet je rijetko pisao pisma i slao telegrame. Čak i njegovi najbliži prijatelji rijetko su dobivali odgovore na svoja pisma. Kad mu se rodilo prvo dijete, Dirichlet je sretnu vijest javio svojem tastu. Poruka je glasila: "2+1=3."