Carl Friedrich Gauss

(30. travnja 1777. – 23. veljače 1855.)

Branimir Dakić, Zagreb

Veliki njemački matematičar Carl Friedrich Gauss rođen je 30. travnja 1777. u Braunschweigu, a umro 23. veljače 1855. u Göttingenu. Njegovo značenje u matematičkoj znanosti najbolje odražava titula koju su mu podarili matematičari — *princeps mathematicorum* (princ matematike). Neki su ga pak prozvali *Arhimedom novijega doba*.

Gauss je sin jednostavnih i skromnih roditelja. Majka, gotovo nepismena, no inteligentna žena, bila je kći siromašna kamenoresca, a prije udaje za Gaussova oca radila je kao dvorkinja. Gaussov je otac bio radnik, radio je razne, uglavnom fizičke poslove: vrtlario, zidao, kopao. U takvu okruženju razvijao se jedan od najvećih umova u povijesti matematičke znanosti.

Gaussov je talent uočen zarana i prava je sreća što je naišao na punu potporu mladoga učiteljeva pomoćnika Martina Bartelsa koji je i sam bio sklon matematici. Njegovom je zaslugom Gauss dobio stipendiju grofa od Brunswick-Wolfenbuettela te

Slika 1. Gaussova rodna kuća

je od 1792. do 1795. studirao na Collegiumu Carolinumu. Tu je učio moderne jezike i nastavio ranije započeto učenje klasičnih jezika. Školovanje je potom nastavio na čuvenom njemačkom sveučilištu u Göttingenu. Gauss nije bio osobito druželjubiv, čini se kako je jedini njegov prijetelj bio Farkas Bolyai (otac čuvenog mađarskog matematičara Janosa Bolyaija), koji je od njega bio nešto stariji i s kojim je u dugim šetnjama raspravljao o matematici.

Oženio se u listopadu 1805. a supruga Johanna Elisabetha Rosina Osthoff podarila mu je troje djece: Josepha (1806.), Wilhelminu (1809.) i Louisa (1809.). Gaussov je obiteljski život bio nesretan. Otac mu je umro 1808., godinu potom umrla mu je žena, a nedugo iza i mlađi sin. Upao je u depresiju od koje se gotovo nikada nije potpuno oporavio. Doduše, ponovo se oženio Friedericom Wilhelminom Waldeck, Minnom, najboljom prijateljicom prve žene i kćeri jednog göttingenskog profesora. Taj brak nije bio osobito sretan, doimao se brakom iz interesa. I s Minnom je Gauss imao troje djece: Eugena (1811.), Wilhelma (1813.) i Theresu (1816.). Kad je Minna nakon duge bolesti 1831. godine umrla, Theresa se preselila ocu i brinula se za njega i njegovu majku do kraja njihova života.

Čini se kako osobne tragedije i njima izazvana depresija nisu utjecale na Gaussov rad. On je 1807. izabran za sveučilišnog profesora u Göttingenu, a nešto kasnije je postao i direktor tamošnje zvjezdarnice. Profesorski ga posao nije suviše zaokupljao, jer nije volio podučavati, a nije baš niti bio sklon suradnji s drugim matematičarima. Uglavnom se držao podalje od njih. Ipak, s nekima se redovito dopisivao, primjerice s Besselom i Sophie Germain. Pod Gaussovim utjecajem izrasli su mnogi veliki matematičari, među kojima Richard Dedekind i Bernhard Riemann.

Slika 2. Gaussova druga žena Minna Waldeck

Slika 3. Theresa Gauss

Gauss je bio duboko religiozan i vrlo konzervativan.

1. Konstrukcije pravilnih poligona

Gauss je u matematiku ušao kao 18-godišnjak na velika vrata. Primijetio je kako brojevi 3, 9, 27,... 3^{16} (potencije broja 3) pri dijeljenju sa 17 daju za ostatke sve brojeve 1, 2, 3,..., 16. Odatle je krenuo prema svojem prvom velikom otkriću – konstrukciji pravilnog 17-terokuta. Taj problem "preveden" na jezik algebre, postavlja pitanja rješivosti algebarske jednadžbe oblika $x^n - 1 = 0$, u ovom konkretnom slučaju jednadžbe $x^{17} - 1 = 0$.

Gauss je spoznao kriterij koji daje odgovor na pitanje koji se pravilni poligon može a koji ne može konstruirati ravnalom i šestarom. Poligon s n stranica jest konstruktibilan ako i samo ako je n oblika $2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, gdje je m prirodni broj ili nula, a p_i različiti Fermatovi brojevi, tj.

prosti brojevi oblika $2^{2^r}+1$. Do sada je poznato svega pet takvih prirodnih brojeva: $n=3$ $(r=0)$, $n=5$ $(r=1)$, $n=17$ $(r=2)$, $n=257$ $(r=3)$, $n=65337$ $(r=4)$.

Nadalje, dokazano je kako se pomoću ravnala i šestara može konstruirati svaka dužina čija je duljina, uz zadanu jedinicu, izražena s konačno mnogo računskih operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i korjenovanja.

Primijetimo kako se konstrukcija pravilnog n-terokuta svodi na zadatak dijeljenja kružnice polumjera 1 na n sukladnih dijelova. Tada su tetive te kružnice koje spajaju uzastopne djelišne točke stranice pravilnog n-terokuta.

Pokažimo na primjeru pravilnog peterokuta o kakvim je idajama ovdje riječ.

Pođimo od jednadžbe $z^5-1=0$.

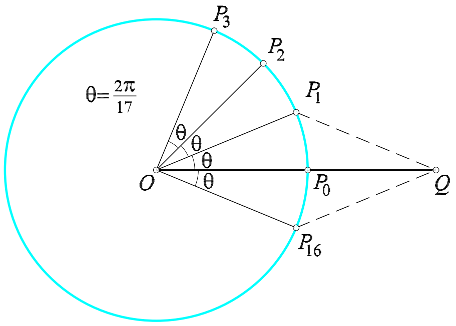
Zapišimo je u obliku $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$. Slijedi $z=1$ ili $z^4+z^3+z^2+z+1=0$. Ova posljednja jednadžba je simetrična pa je nakon dijeljenja sa z^2 zapisujemo u obliku $z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}=0$. Zamjenom $w=z+z^{-1}$ ona prima oblik $w^2+w-1=0$.

Nakon toga imamo dvije kvadratne jednadžbe $z^2-w_1z+1=0$, $z^2-w_2z+1=0$, odakle se dobiju sva četiri rješenja jednadžbe koju smo dobili nakon faktorizacije. Kaže se da je jednadžba $x^5-1=0$ rješiva u radikalima. Njezina rješenja ispunjavaju uvjete konstruktibilnosti.

Analogno je Gauss pokazao kako je u radikalima rješiva i jednadžba $x^{17}-1=0$, što dakle znači kako je moguće konstruirati i pravilni sedamnaesterokut. Do ovoga otkrića Gauss je došao u 18. godini i na njega je uvijek bio ponosan. Poslije Gaussove smrti u Göttingenu je postavljena njegova skulptura čije je postolje pravilni 17-terokut.

Na slici je prikazan problem konstrukcije pravilnog 17-terokuta. Zadatak je konstruirati njegovu stranicu, odnosno luk duljine $1/17$ opsega jedinične kružnice sa središtem u točki O. Napomenimo kako je ovdje glavni zadatak konstruirati dužinu $\overline{OQ}$ duljine dane izrazom na dnu stranice.

U tome izrazu, ma koliko on djelovao zastrašujuće, nailazimo samo na iracionalne veličine



Slika 4.

(druge korijene), a to je upravo uvjet koji mora biti ispunjen kako bi bila provediva konstrukcija pravilnog 17-terokuta pomoću ravnala i šestara.

2. Teorija brojeva

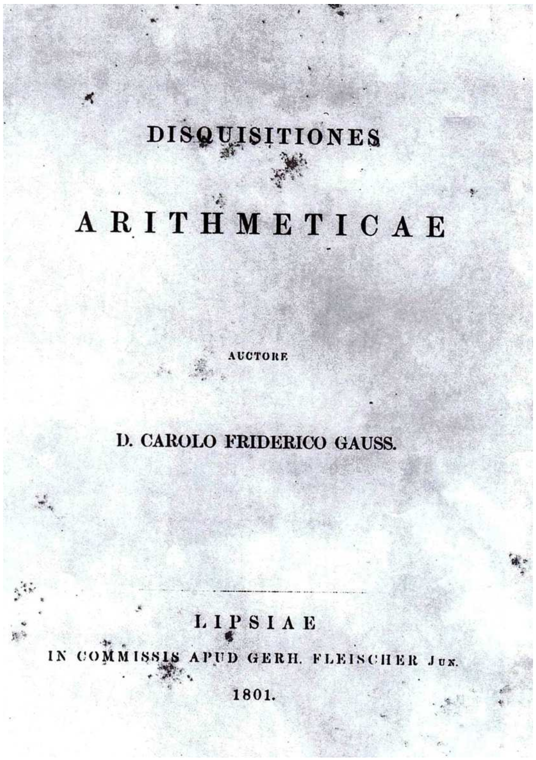
Gauss je svoja istraživanja iz područja *Teorije brojeva*, za koju je znao govoriti da je *kraljica matematike*, objavio u monumentalnom djelu *Disquisitiones arithmeticae*. Knjiga se pojavila 1801. godine, a ima sedam odjeljaka na više od 500 stranica velikoga formata. U prva tri bavi se algebrom kongruencija, koje danas u modernoj notaciji zapisujemo kao $a \equiv b \pmod p$, gdje su a i b cijeli brojevi, a p prirodan broj te čitamo: *a je kongruentno b modulo p*. Ekvivalentno je značenje $p \mid (a-b)$, odnosno razlika $a-b$ djeljiva je s p. Uvođenjem kongruencija razvijen je matematički aparat koji je tijekom vremena odigrao vrlo značajnu ulogu u teoriji brojeva.

Četvrti odjeljak razmatra teoriju tzv. *kvadratnih ostataka*.

Gauss je još kao 19-godišnjak uočio kako ostaci pri dijeljenju kvadrata cijelih brojeva prostim brojem p ne mogu biti bilo koji brojevi. Tako primjerice pri dijeljenju broja n^2 s 3 ostaci mogu biti samo 0 ili 1, pri dijeljenju s 5 to mogu biti 0, 1 ili 4 itd.

No pitanje se može postaviti i s druge strane: *Za koji prost broj p postoji n^2, takav da pri dijeljenju s p daje zadani ostatak q?* Gauss je postavio

$$\frac{1}{8}\Bigl(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2(-1+\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}})}\Bigr).$$


DISQUISITIONES

ARITHMETICAE

AUCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAUSS.

LIPSIAE

IN COMMISSIS APUD GERH. FLEISCHER JUN.

1801.

Slika 5.

hipotezu: Ako je $p = 4k - 1$, tada nikoji n^2 pri dijeljenju s p ne daje ostatak $p-1$, a za $p = 4k+1$ takav n^2 postoji. On nije znao da je taj problem ranije već potpuno razriješio Euler.

Gauss dalje istražuje za koje p brojevi n^2 mogu dati neki ostatak q. No ovdje uistinu nije mjesto daljem izlaganju njegovih rezultata na ovom polju.

Nastavimo radije s još nekim Gaussovim istraživanjima.

Dijeljenjem broja 1 prostim brojem p, dobije se beskonačan periodični decimalni broj. To je opće poznata činjenica koju nije teško dokazati. Ali kolika je duljina perioda? Gauss se ovim pitanjem također bavio u mladosti i provjerivši sve proste brojeve $p < 1\,000$ zaključio kako je duljina perioda djelitelj broja $p-1$. Ova činjenica se provjerava primjenom tzv. *Malog Fermatovog poučka* [1] kojega je Gauss prethodno dokazao. njega su posebice zanimali oni p za koje je duljina perioda jednaka točno $p-1$. Je li broj takvih p konačan ili beskonačan, nije ni do danas utvrđeno.

Gaussu se ponegdje pripisuje i dokaz *Osnovnog poučka aritmetike* koji kaže da se svaki cijeli broj na jedinstven način može rastaviti u umnožak prostih faktora. No u većini "ozbiljnih" izvora na tu se činjenicu ne nailazi.

Djelom *Disquisitiones arithmeticae* ne iscrpljuje se Gaussov rad na teoriji brojeva. U seriji članaka što su objavljeni između 1808. i 1832. godine on nastavlja izučavanje kongruencija višeg reda $x^n \equiv (\mod p)$. Razmatranja proširuje na brojeve oblika $a + bi$, gdje su a i b cijeli brojevi. Danas takve brojeve nazivamo *Gaussovi brojevi*. Time je začeta jedna nova grana matematike — *Teorija algebarskih brojeva*.

Spomenimo još na kraju kako je Gauss na posljednjoj stranici svojih đačkih matematičkih tablica zapisao čuvenu formulu $p(n) \approx \dfrac{n}{\ln n}$, koja kaže koliko je približno prostih brojeva manjih od danog prirodnog broja n.

3. Osnovni teorem algebre

Godine 1799. Gauss je stekao stupanj doktora znanosti na sveučilištu u Helmstadtu radom u kojem je dokazao *Osnovni teorem algebre:*

Svaka algebarska jednadžba $f(z) = 0$ ima u skupu kompleksnih brojeva barem jedno rješenje.

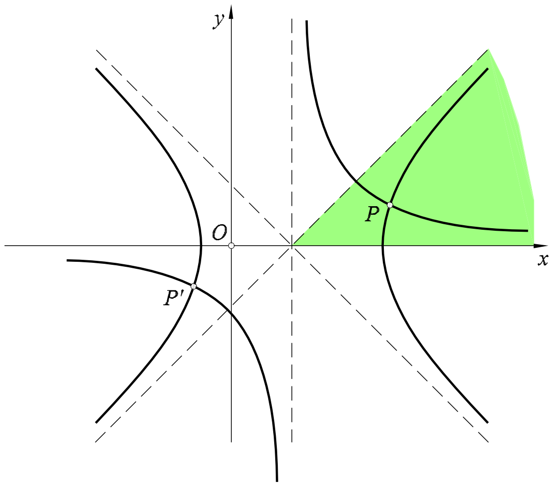
Napomenimo kako se taj teorem u Francuskoj često zove *d'Alambertovim teoremom*.

Gauss se tijekom života ovom poučku vraćao u više navrata te je tako dao još tri njegova dokaza. No zanimljivo je što se prvi oslanjao na geometrijsku interpretaciju, zbog koje je Gauss i uveo geometrijsku predodžbu kompleksnih brojeva. Identifikacija kompleksnog broja $z = x + yi$ i točke (x, y) omogućuje uvođenje brojevne ravnine u kojoj je os x realna, a os y imaginarna. Takva se ravnina danas u pravilu naziva *Gaussova ravnina*.

Jednadžbu $f(z) = 0$ možemo zapisati u obliku $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Odatle slijedi $u(x, y) = 0$ te $v(x, y) = 0$, što su, geometrijski gledano, dvije krivulje čije je sjecište točka (a, b). Odnosno, kompleksni broj $a + bi$ rješenje je dane jednadžbe.

[1] Ako je p prost broj, te a i p relativno prosti brojevi, onda je $a^{p-1} \equiv 1(\mod p)$

Navedimo za primjer rješenje kvadratne jednadžbe $z^2 - 2z - 3 - 4i = 0$.



Slika 6.

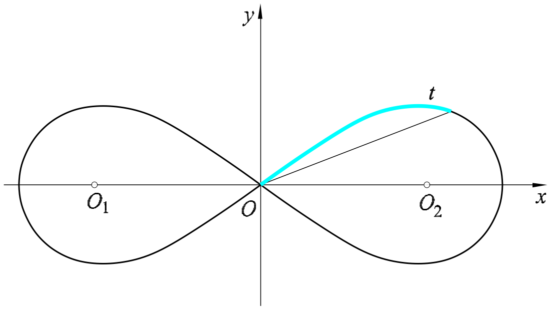
Razdvajanjem realnog i imaginarnog dijela dobit ćemo $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 3 = 0$ i $v(x, y) = 2xy - 2y - 4 = 0$.

Kad te jednadžbe zapišemo u obliku $(x-1)^2 - y^2 = 4$, odnosno $(x-1)y = 2$ uočit ćemo kako su to jednadžbe dviju hiperbola. One se sijeku u točkama M i N koje su, tumačene kao kompleksni brojevi, rješenja zadane jednadžbe $f(z) = 0$.

Gaussov dokaz teorema išao je za time da dokaže kako se krivulje $u = 0$ i $v = 0$ općenito uvijek sijeku.

4. Teorija funkcija i beskonačnih nizova

I opet je jedan zanimljiv zadatak odveo Gaussa na putove stvaranja novih otkrića. Riječ je o problemu računanja duljine *lemniskate*, krivulje za čiju svaku točku je umnožak njezinih udaljenosti od dviju zadanih točaka O_1 i O_2 stalan broj i iznosi $\left(\frac{1}{2}|O_1O_2|\right)^2$. Nije ni danas jasno kako je Gauss došao do rezultata, ali je provjereno kako je on točan do 10^{-11}. Od lemniskate Gauss je prešao na njezino poopćenje, eliptičke funkcije. Shvatio je kako je riječ o *potpuno novom području analize*.



Slika 7. Lemniskata

S dobnom zrelošću Gauss se okreće čistoj matematici. U pismu Besselu iz 1811. g. on govori o svojem otkriću jednog prekrasnog teorema, čime je, kako neki danas drže, zasnovana *Teorija funkcija kompleksne varijable.* Riječ je o poznatom poučku koji se danas najčešće zove *Cauchyjev integralni teorem* i koji pojednostavljeno rečeno kaže kako je linijski integral duž zatvorene krivulje jednak nuli.

Godinu kasnije, Gauss objavljuje još jedan svoj majstorski rad o *hipergeometrijskim redovima* i pridruženim diferencijalnim jednadžbama.

Riječ je o redu:

$$F(a, b, c; x) = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)\cdot b\cdot(b+1)}{c(c+1)}\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\cdot\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Za poseban odabir vrijednosti a, b, c i x ovaj zapis obuhvaća većinu elementarnih funkcija, a i mnoge transcedentne funkcije. Evo nekoliko primjera:

(1) *Opća binomna formula*

$$(1+x)^n = F(-n, 1, 1; 1-x);$$

(2) *Logaritam*

$$\log(1-x) = x\cdot F(1, 1, 2; -x);$$

(3) *Arkus tangens*

$$\operatorname{arc\,tan} x = x\cdot F(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}; x^2);$$

Ovdje je zgodno spomenuti kako stavljajući $x = 1$ imamo $\operatorname{arc\,tan} x = \frac{\pi}{4}$, što daje poznati Leibnizov red za broj π.

5. Teorija pogrešaka i numerička analiza

1. siječnja 1801. Giuseppe Piazzi otkrio je mali asteroid, kasnije nazvan Ceres. Nesretno smješten za detaljno promatranje i proračun njegove orbite (putanje), Ceres se nakon 41 dana izgubio. U listopadu 1801. godine astronomi su usmjerili svoje teleskope u točku na nebu, gdje se po Gaussovu predviđanju Ceres trebao pojaviti. Bio je to potpuni trijumf Gaussovog proračuna. U sljedećih šest godina zahvaljujući Gaussovim metodama otkrivena su još tri asteroida. Njegovo drugo veliko djelo, *Theoria motus corporum coelestium*, objavljeno 1809., rezultat je njegovih astronomskih istraživanja i bilo je međaš u primjeni matematike u astronomiji. Na neki način ovim je djelom ustoličena i jedna danas vrlo značajna grana matematike, teorija pogrešaka.

Napomenimo ovdje još kako se jedna vrsta raspodjele statističkih podataka zove *Gaussova razdioba*. Kod njega se ona javlja u vezi s njegovim geodetskim i astronomskim mjerenjima.

Gauss je dao velik doprinos zasnivanju grane matematike koju danas zovemo *numerička analiza*. On je dao više raznovrsnih interpolacijskih formula, neke danas nose njegovo ime. Vrlo poznata metoda *gaussove integracije* objavljena je 1814.

Godine 1812. Gauss je objavio tablice poznate kao *Gaussovi logaritmi*.

6. Diferencijalna geometrija

Praktični kartografski problemi potaknuli su Gaussa na ozbiljnije izučavanje problema iz geodezije. Već 1922. on je objavio jedan rad u kojem se bavi problemima preslikavanja sa sfere ili neke rotacijske plohe na ravninu.

U svojoj trećoj značajnoj raspravi *Disquisitiones generales circa superficies curvas* iz 1827. godine, Gauss se bavi *unutarnjom geometrijom ploha*. On naime primjenjuje jedan potpuno nov koncept pri kojem se na plohu u trodimenzionalnom prostoru gleda kao da je ona sama po sebi prostor. Tu je ideju slijedio Riemann i ona se protegnula (proširila) i dalje u područje neeuklidskih geometrija. Slijedeći pionirski rad Eulera, Gauss je razvio koncept *totalne zakrivljenosti* dijela plohe omeđenog zatvorenom krivuljom. Dopuštajući stezanje krivulje u točku omogućilo mu je definiranje mjere zakrivljenosti (ponekad se zove *Gaussova zakrivljenost*) u nekoj točki plohe.

Gaussa interesiraju plohe konstantne zakrivljenosti, kakva je primjerice sfera čija je zakrivljenost pozitivna i u svakoj njezinoj točki jednaka $1/R$. Uveo je i pojam *pseudosfera* za neke rotacijske plohe stalne negativne zakrivljenosti.

7. Neeuklidska geometrija

Problem Euklidovog petog postulata jedan je od problema koji je obilježio povijest matematike kroz puna dva tisućljeća. Matematičari su pokušavali odgovoriti na pitanje je li aksiom o paralelama uistinu aksiom ili je pak Euklid načinio svojevrstan previd uvrštavajući u aksiome i jedan teorem. Problem je riješen zamjenom spornoga novim aksiomom čime je razvijena nova konzistentna teorija, nova geometrija koju danas zovemo neeuklidskom. Otkriće neeuklidske geometrije pripisuje se mađarskom matematičaru Janosu Bolyaiju (1802.–1860.) i Rusu Nikolaiju Lobačevskom (1793.–1856.) koji su do rješenja došli potpuno nezavisno negdje 1920. godine.

No i ovdje je, kako se to pokazalo uvidom u njegovu ostavštinu, Gauss neopravdano izostavljen. Naime, on je još u mladim danima upoznao taj problem i o njemu intenzivno razmišljao. Godine 1792. jednom je prijatelju rekao kako on potpuno razumije o čemu se radi te da prihvaća ideju da se zamjenom aksioma o paralelama može izgraditi nova geometrija. Nekoliko godina kasnije on je tu ideju proveo u djelo uvodeći novi aksiom koji kaže *da se točkom izvan pravca mogu polo-*

žiti barem dvije paralele s tim pravcem. Izvodio je posljedice koje su uzrokovane ovom zamjenom aksioma pri čemu je dobio niz novih zanimljivih poučaka. U jednom svojem pismu iz 1817. Gauss je napisao:

Sve sam uvjereniji kako nužnost naše geometrije ne može biti dokazana, barem ne ljudskim razumom (razlozima). Možda ćemo u drugom životu biti sposobni spoznati prirodu prostora koji nam je sada nedokučiv. Do tada ne smijemo geometriju smjestiti u istu klasu s aritmetikom, koja je čisto "a priori," nego s mehanikom [2]

8. Astronomija, fizika

U tridesetim godinama 19. stoljeća Gauss se intenzivno bavio i fizikom. Objavio je dvije vrijedne publikacije. Prvu posvećuje svojim razmišljanjima o općim načelima mehanike, a u drugoj se bavi kapilarnim pojavama. Zapaženo je i Gaussovo bavljenje kristalografijom.

Slika 8. Spomenik Gaussu i Weberu u Braunschweigu

1828. godine Gauss je u domu Humboldta upoznao Wilhelma Webera i nedugo potom s njim započeo suradnju na području elektrodinamike i zemljinog magnetizma. [3] Iz te suradnje proizašlo je više ne samo teorijskih već i praktičnih rezultata. Tako su primjerice konstruirali elektromagnetski telegraf kojim su povezali zvjezdarnicu i fizikalni institut. U isto vrijeme Gauss je počeo razvijati danas jednu od važnih grana matematičke fizike — *Teoriju potencijala.*

* * *

Premda je živio gotovo punih 78 godina, ipak je teško pojmiti plodnost Gaussova rada. Rijetki su izdanci ljudske vrste koji su mu ravni i koji su našu civilizaciju obdarili tolikim i tako vrijednim otkrićima. Neka stoga i ovaj članak bude ne samo sjećanje već i izraz zahvalnosti Karlu Friedrichu Gaussu – "princu matematike".

Literatura

[1] Grattan – Guinness, Ivor, *The Rainbow of Mathematics*, W. W. Norton & Comp, New York-London, 2004.
[2] Hollingdale, Stuart, *Makers of Mathematics*, Penguin Books, 1994.
[3] Smith, David Eugen, *History of Mathematics*, Dover Publications, 1958.

* * *

OŠTROUMNI GAUSS

Gauss se u osnovnoj školi isticao svojom oštroumnošću. Jednom ga je učitelj, poigravajući se njime upitao:
— Carl, postavit ću ti dva pitanja. Ako na prvo odgovoriš točno, na drugo ne moraš odgovarati. Reci mi najprije, koliko je iglica na božićnoj jelci?
— 67 534, — odgovori Gauss bez puno razmišljanja.
— Kako si uspio tako brzo to prebrojiti?
— E, to je već drugo pitanje, gospodine!

[2] Više o problemu petog postulata i otkriću neeuklidske geometrije naći ćete u članku dr. Zdravka Kurnika, 175 godina od otkrića neeuklidske geometrije, MŠ broj 8/2000., str. 129.
[3] Gauss je mjerna jedinica magnetske indukcije.