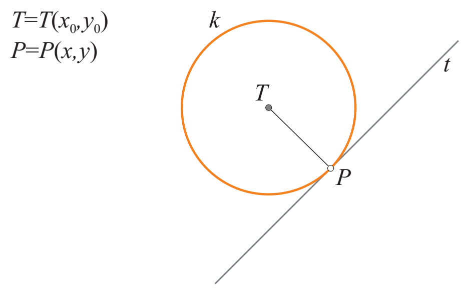
Jedan način određivanja udaljnosti točke od pravca i ravnine

Antun Ivanković, Ilok

Formulu za određivanje udaljenosti točke $T(x_0, y_0)$ od pravca $p \ldots Ax + By + C = 0$ i ravnine $\mathcal{R} \ldots Ax + By + Cz + D = 0$ dobivamo lako i elegantno koristeći metode vektorske algebre, tj. predočavajući pravce i ravnine u vektorskom obliku [1]. Pošto se to u našim srednjim školama ne obrađuje, uglavnom se te formule određuju svodeći jednadžbu pravca na normalni oblik. Vrši se analiza je li točka T s iste strane pravca p gdje je koordinatni početak ili pak s druge. Tako se dobije formula za udaljenost točke od pravca, koja se izvodi u srednjim školama. Ona glasi:

$$d = |T, p| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (1)$$

U ovome ćemo članku izložiti jedan način izvođenja ovih formula bez obzira na položaj točke T u odnosu na pravac p. Znamo da se u ravnini kružnica i pravac mogu sjeći u jednoj ili dvije točke, ili se pak ne sijeku. Ako kružnica ima jednu zajedničku točku s pravcem, polumjer kruga je istovremeno i udaljenost središta kruga od pravca. Na ovome se temelji naša metoda određivanja udaljenosti točke od pravca i ravnine. Točka T je središte kružnice, a pravac p tangenta na kružnicu.



Neka je

$$k \ldots (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \qquad (2)$$

jednadžba kružnice sa središtem u točki $T(x_0, y_0)$ polumjera r, koji ćemo naknadno odrediti tako da kružnica ima točno jednu zajedničku točku T s pravcem p. Jednadžbu (2) možemo zapisati u obliku:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0. \qquad (3)$$

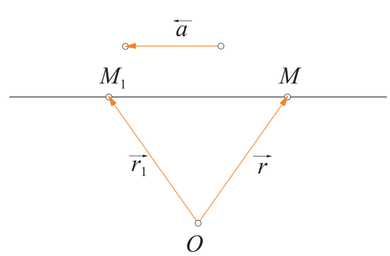
Radi jednostavnijeg pisanja, uvedimo supstitucije:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= u \\ y - y_0 &= v \\ Ax_0 + By_0 + C &= k \end{aligned} \qquad (4)$$

Stavljajući ove supstitucije u (2) i (3), dobijemo sustav:

[1] Jednadžba pravca kroz točku u vektorskom obliku glasi: $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}$, gdje je $\vec{r}$ vektor položaja proizvoljne točke M pravca p koji prolazi točkom M_1 i paralelan je vektoru $\vec{a} \neq \vec{0}$. Vektor $\vec{r}_1$ je vektor položaja točke M_1, a t je skalar koji zavisi od položaja točke M na pravcu p.

Jednadžba $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}$ se lako dokazuje promatrajući sliku. Naime, pošto su vektori $\overrightarrow{M_1M}$ i $\vec{a}$ kolinearni, imamo da je $\overrightarrow{M_1M} = t\vec{a}$. Sa slike vidimo da je $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}$, što je dana vektorska jednadžba pravca.



$$
\begin{aligned}
u^2 + v^2 &= r^2 \\
Au + Bv + k &= 0 \qquad (5)\\
Ax_0 + By_0 + C &= k
\end{aligned}
$$

Koeficijenti A i B ne mogu istovremeno biti jednaki nuli, pa možemo ne umanjujući općenitost uzeti da je $A \neq 0$. Iz prve dvije relacije sustava (5) dobijemo:

$$\frac{(k+By)^2}{A^2} + v^2 = r^2,$$

što sređeno po v daje:

$$(A^2+B^2)v^2 + 2Bkv + (k^2 - A^2r^2) = 0. \quad (6)$$

Pošto pravac p dodiruje kružnicu k u točki P, diskriminanta kvadratne jednadžbe (6) mora biti jednaka nuli, pa imamo:

$$k^2B^2 - (A^2+B^2)(k^2 - A^2r^2) = 0. \quad (7)$$

Rješavanjem ove jednadžbe po r dobijemo traženi obrazac za udaljenost točke od pravca, a rješavanjem jednadžbe (6) dobijemo koordinate dirališta P pravca i kružnice [2].

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{k}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \\
&= \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Za pravac p u prostoru čije su jednadžbe zadane u parametarskom obliku [3] imat ćemo jednadžbe sfere

$$
\begin{aligned}
u &= x - x_0 = a_1 + b_1t \\
v &= y - y_0 = a_2 + b_2t \qquad (9)\\
w &= z - z_0 = a_3 + b_3t
\end{aligned}
$$

u točki $T(x_0, y_0, z_0)$.

$$u^2 + v^2 + w^2 - r^2 = 0, \qquad (10)$$

gdje je r polumjer sfere, tj. tražena udaljenost d. Rješavanjem sustava (9) i (10), dobijemo:

$$(a_1+b_1t)^2+(a_2+b_2t)^2+(a_3+b_3t)^2-r^2 = 0 \qquad (11)$$

i sređivanjem po t izlazi:

$$
\begin{aligned}
(b_1^2+b_2^2+b_3^2)t^2 &+ 2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)t \\
&+ a_1^2+a_2^2+a_3^2-r^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Stavljajući da je diskriminanta jednaka nuli i sređivanjem izraza, dobije se:

$$
\begin{aligned}
r^2 &= \frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2} \\
&= \frac{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2},
\end{aligned}
$$

---

[2] $x - x_0 = \frac{kA}{A^2+B^2}$ i $y - y_0 = \frac{kB}{A^2+B^2}$

[3] Označimo koordinate točke M_1 s (x_1, y_1, z_1), koordinate vektora $\vec{a} \neq \vec{0}$ s (a_1, a_2, a_3), a tekuće koordinate točke M s (x, y, z). Tada iz vektorske jednadžbe pravca $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}$ koji je paralelan vektoru $\vec{a}$ i prolazi točkom M_1, dobijemo jednadžbu:

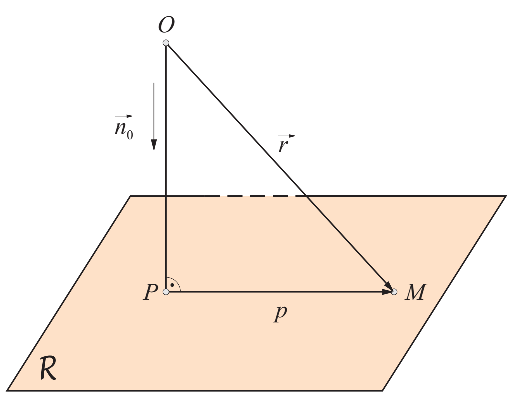
$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + t(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}).$$

Ova vektorska jednadžba je ekvivalentna sa sustavom od tri skalarne jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + ta_1 \\
y &= y_1 + ta_2 \\
z &= z_1 + ta_3
\end{aligned}
$$

Kada parametar t uzima sve moguće realne vrijednosti, ove skalarne jednadžbe daju koordinate (x, y, z) svih točaka pravca p.

[4] Vektorska jednadžba ravnine glasi: $\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p = 0$, gdje je $\vec{r}$ vektor položaja točke M ravnine koja je na udaljenosti p od koordinatnog početka i okomita je na jedinični vektor $\vec{n}_0$.



Pošto su vektori $\vec{n}_0$ i $\overrightarrow{PM}$ okomiti, imamo da je skalarni produkt $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}_0 = 0$ Iz trokuta OPM nalazimo:

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \vec{r} - p \cdot \vec{n}_0,$$

jer su vektori $\overrightarrow{OP}$ i $\vec{n}_0$ kolinearni i istog smjera. Sada je:

$$(\vec{r} - p\vec{n}_0)\vec{n}_0,$$

a poslije skalarnog množenja i korištenja činjenice da je $\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = 1$, imamo:

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p = 0.$$

ili radi lakšeg pamćenja napisano pomoću determinanti:

$$r=\sqrt{\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}, \tag{12}$$

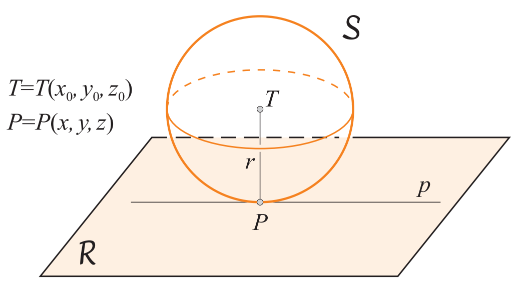
čini formulu za udaljenost točke od pravca zadanog u parametarskom obliku.

Slijedeći ovu metodu, odredimo udaljenost točke T od ravnine $\mathcal{R}\ \ldots\ Ax+By+Cz+D=0$. [4] Analogno, možemo ne umanjujući općenitost opet pretpostaviti da je $A\neq 0$ i dalje imamo:
Jednadžba sfere sa središtem u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ je:

$$\mathcal{S}\ldots(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-r^2=0, \tag{13}$$

a ravnine

$$\mathcal{R}\ldots Ax+By+Cz+D=0. \tag{14}$$



Radi jednostavnosti opet uvodimo supstitucije: $x-x_0=u$, $y-y_0=v$, $z-z_0=w$. Jednadžbu ravnine $\mathcal{R}$ napišimo u obliku:

$$\begin{aligned} &Ax+By+Cz+D\\ &=A(x-x_0)+A(y-y_0)+A(z-z_0)\\ &\qquad+Ax_0+By_0+Cz_0+D\\ &=Au+Bv+Cw+k=0. \end{aligned} \tag{15}$$

Iz (15) imamo

$$u=-\frac{Bv+Cw+k}{A}$$

Unoseći to u jednadžbu sfere

$$u^2+v^2+w^2=r^2=0,$$

dobije se izraz

$$\frac{(Bv+Cw+k)^2}{A^2}+v^2+w^2=r^2$$

Sređivanjem ovoga izraza po v, dobije se kvadratna jednadžba:

$$\begin{aligned} &(A^2+B^2)v^2+2(Cw+k)Bv+(A^2+C^2)w^2\\ &\qquad+2Cwk+k^2-A^2r^2=0. \end{aligned} \tag{16}$$

Da bi ravnina $\mathcal{R}$ sa sferom $\mathcal{S}$ imala jednu zajedničku točku diskriminanta jednadžbe (16) mora biti jednaka nuli, pa se opet dobije kvadratna jednadžba, ali po w:

$$(A^2+B^2+C^2)w^2+2Ckw+k^2-(A^2+B^2)r^2=0. \tag{17}$$

Iz istog razloga i diskriminanta jednadžbe (17) mora biti jednaka nuli, što daje uvjet:

$$C^2k^2-(A^2+B^2+C^2)[k^2-(A^2+B^2)r^2]=0,$$

odakle se napokon dobije formula za traženu udaljenost. Slijedi:

$$r^2=\frac{k^2}{A^2+B^2+C^2}=\frac{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)^2}{A^2+B^2+C^2},$$

ili

$$r=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{18}$$

Zakljčak: Mislim da bi bilo zgodno ovu metodu — dosjetku za određivanje udaljenosti točke od pravca ili ravnine, pokazati boljim učenicima na redovnim, ili pak izvannastavnim satima kako bi što bolje uvidjeli ljepotu analitičke geometrije i njezinih metoda.

Literatura

[1] B. Dakić, N. Elezović: *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. r. gimnazije*, Element, Zagreb.

[2] Z. Stojaković, D. Herceg: *Linearna algebra i analitička geometrija*, PMF, Novi Sad.

[3] Đ. Kurepa, S. Škreblin, J. Brečević: *Matematika za treći razred gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb.