Prilog o specijalnim multinomnim koeficijentima

Hugo Birolla, *Zagreb*

1. Uvod

Pri potenciranju binoma $(a+b)^n$ služimo se binomnim koeficijentima. Općenito

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n. \quad (1)$$

Oni se mogu izračunati prema definiciji, a mogu se generirati pomoću tablice koeficijenata, tzv. Pascalovog trokuta. Shemu tog trokuta možemo prikazati ovako:

n=	0	1	2	3	4	5	6	...
r=0	1	1	1	1	1	1	1	...
r=1		1	2	3	4	5	6	...
r=2			1	3	+6	10	15	...
r=3				1	+4	$\sum$=10	20	...
r=4					1	5	15	...
r=5						1	6	...
r=6							1	...

Tablica 1. Binomni koeficijenti

Očito je da je broj koeficijenata u pojedinom stupcu jednak $n+1$, da je suma koeficijenata u pojedinom stupcu potencija broja $2(=2^n)$, kao i to da se binom $(a+b)$ može pisati kao $a(1+x)$, što daje ideju za proširenje na višečlani izraz.

2. Proširenje

Izraz $(1+x)$ možemo proširiti na više načina, a ovdje će to biti učinjeno dodavanjem članova koji čine geometrijski red, tj. kao

$$1+x+x^2+\ldots+x^m.$$

Pri potenciranju takvog specijalnog polinoma (multinoma s $p=m+1$ članova)

$$(1+x+x^2+\ldots+x^m)^n = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_p + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_p \cdot x + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_p \cdot x^2 + \ldots \begin{bmatrix} n \\ mn \end{bmatrix}_p \cdot x^{mn} \quad (2)$$

mogu se (analogno kao i pri potenciranju binoma) koristiti tablice specijalnih multinomnih koeficijenata, a može se koristiti i definicijska formula. Ti koeficijenti će se u okviru ovoga rada pisati (za razliku od binomnih koeficijenata) u uglatoj zagradi uz indeks koji označava broj članova u geometrijskom redu. Binomni koeficijenti tako imaju dvojaku oznaku

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_2 \quad \text{ili} \quad \binom{n}{r}.$$

Tablice ovih koeficijenata za pojedine vrijednosti veličine p mogu se pisati na odgovarajući način kao i kod binomnih koeficijenata. Pojedini se koeficijenti u r-tom retku dobivaju kao suma od p koeficijenata iz predhodnog stupca tablice – u recima s oznakom $r-m$, $r-m+1$, $\ldots$, r. Naravno, broj koeficijenata u takvoj sumi je u prvih $m-1$ redaka manji, jer ne postoji prethodnih m redaka!

Broj koeficijenata ($\neq 0$) je u svakom stupcu jednak $mn+1$, a suma n-tog stupca je $p^n = (m+1)^n$. U binomnom koeficijentu, s oznakama n i r, r može poprimiti vrijednosti od 0 do n, tj. $n+1$ vrijednost ($n, r \in \mathbf{Z}$). U odgovarajućem multinomnom koeficijentu r može poprimiti vrijednosti od 0 do mn, dakle $mn+1$ vrijednost ($n, r \in \mathbf{Z}$).

Također je

$$\sum_{r-0}^{m\times n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_p = p^n. \tag{3}$$

Dva primjera tablica multinomnih koeficijenata navedena su u točkama 3. i 4.

Svakako da je izazov pronaći jednostavne izraze koji bi vrijedili za koeficijente oblika

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_3, \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_4, \ldots$$

Isto tako traži se i koeficijent koji bi obuhvatio sve te koeficijente, tj. za bilo koje vrijednosti za p, n i r – uključivo onu kad $p \equiv \infty$. Dakle za

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_p \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_\infty .$$

Izraz za prvi od ova četiri koeficijenta se nalazi u sljedećoj točki (o trinomnim koeficijentima) kao formula (5), a posljednji je naveden u dodatku kao formula (6).

3. Trinomni koeficijenti

Za **trinom**

$$(1+x+x^2) = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_3 + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_3 \cdot x + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_3 \cdot x^2 + \ldots + \begin{bmatrix} n \\ 2n \end{bmatrix}_3 \cdot x^{2n} \tag{4}$$

odgovarajući 'trokut' trinomnih koeficijenata izgleda ovako

Prva su dva retka tablice indentična recima u tablici binomnih koeficijenata, a pojedini koeficijent u r-tom retku jednak je sumi triju

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_3 =$$

n=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r=0	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1
r=1		1	2	3	4	5	6	7	**8**→	**9**
r=2		1	**3**	6	10	15	21	28	36	45
r=3			**2**	7	16	**30**	50	77	112	...
r=4			**1**→	**6**	19	**45**	90	161	...	
r=5				3	16	**51**→	**126**	...		
r=6				1	10	45	141	...		
r=6					...	...	...			

Tablica 2. Trinomni koeficijenti

koeficijenata iz prethodnog stupca u recima $r-2$, $r-1$ i r.

Koeficijenti potrebni pri potenciranju trinoma $(1+x+x^2)$, njih $2n+1$, nalaze se u odgovarajćem n-tom stupcu tablice. Sume pojedinih stupaca su nužno potencije broja $3(=3^n)$, $m=2$, a $p=3$.

Svaki takav koeficijent može se izračunati i iz sljedeće relacije kao suma produkta u njoj navedenih binomnih koeficijenata. Donja granica cjelobrojnih vrijednosti za t je nula, a gornja $\frac{r}{2}$, odnosno $\mathrm{INT}\left(\frac{r}{2}\right)$.

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_3 = \sum_{t=0}^{\mathrm{INT}(\frac{r}{2})} \binom{r-t}{t}\binom{n}{r-t} \tag{5}$$

4. Koeficijenti za $p=4$

Za **četveročlani** izraz $(1+x+x^2+x^3)^n$ odgovarajući 'trokut' specijalnih multinomnih koeficijenata izgleda ovako:

Pojedini koeficijent u r-tom retku jednak je sumi četiriju koeficijenata iz prethodnog stupca u recima $r-3$, $r-2$, $r-1$ i r. Broj koeficijenata različitih od nule u pojedinom stupcu je $3n+1$, a sume pojedinih stupaca iznose 4^n.

n=	0	1	2	3	4	5	6	...
r=0	1	1	1	1	1	1	1	...
r=1	0	1	+**2**	3	4	5	6	...
r=2	0	1	+**3**	6	10	+**15**	21	...
r=3	0	1	+**4**	10	20	+**35**	56	...
r=4	0	0	+**3**	$\sum$=**12**	31	+**65**	120	...
r=5	0	0	2	12	40	+**101**	$\sum$=**216**	...
r=6	0	0	1	10	44	135	336	...
r=6	0	0	0	6	40	155	456	...
r=6	0	0	0	3	31	155	546	...

Tablica 3. Koeficijent za p=4

U ostalim trokutima polinomnih koeficijenata (za $p = 5, 6, 7, \ldots$) izračunali bi se koeficijenti na analogan način, a isto tako i za multinom u kojem $p \to \infty$. Ova posljednja tablica koeficijenata imala bi svoje značenje pri potenciranju beskonačnih konvergentnih redova.

5. Dodatak

Istražujući zakonitosti dolazi se do mnogih zanimljivih relacija, pa se neke od njih navode ovdje.

- Za koeficijente iz prvih dvaju redaka svih tablica ($r = 0$ i $r = 1$) očito je
$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_p = 1 \qquad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_p = n$$
- Za treći redak u svima tablicama ($r = 2$) u kojim je $p > 2$ vrijedi
$$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_{p>2} = \binom{n+1}{2}$$
- Za četvrti redak u svima tablicama u kojima je $p > 3$ vrijedi
$$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_{p>3} = \binom{n+2}{3}$$
- Općenito za r-ti redak u tablicama uz uvjet da je $p > r$
$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p>r} = \binom{n+r-1}{r}$$
- Ove se formule mogu primjeniti za izračunavanje prvih $r+1$ koeficijenata. Ako je p vrlo velik ($p \to \infty$) tada prethodna formula vrijedi u svakom slučaju (za svaki r).
$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p\to\infty} = \binom{n+r-1}{r} \tag{6}$$

Zanimljive su i relacije
$$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_2 = \binom{n}{2}$$
$$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_3 = \binom{n+1}{3} + \binom{n}{2}$$
$$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}_4 = \binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{3} + \binom{n}{2}$$
koje se mogu prikazati i u obliku
$$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_2 = \binom{n}{2}$$
$$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_3 = \binom{n+1}{3} + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_2$$
$$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}_4 = \binom{n+2}{4} + \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_3$$
kao i mnoge druge, no to može biti predmetom daljnjeg istraživanja.

6. Zaključak

Ovaj rad pokazuje da su i na jednostavnim i dosta prorađenim područjima moguća daljnja istraživanja i zanimljivi rezultati kao što su to tablice 1 i 2, te formule (5) i (6). Autor je do ovih tablica multinomnih koeficijenata došao u školskoj godini 1957/58. kao student na poticaj prof. dr. Vladimira Vranića (tadašnjeg prof. Tehničkog i Prirodoslovno-matematičkog fakulteta), ali je pričekao mirovinu da ih dopuni ponekom formulom za izračunavanje, i da ih objavi u času kada mu publiciranje članka ne čini obvezu već samo zadovoljstvo.