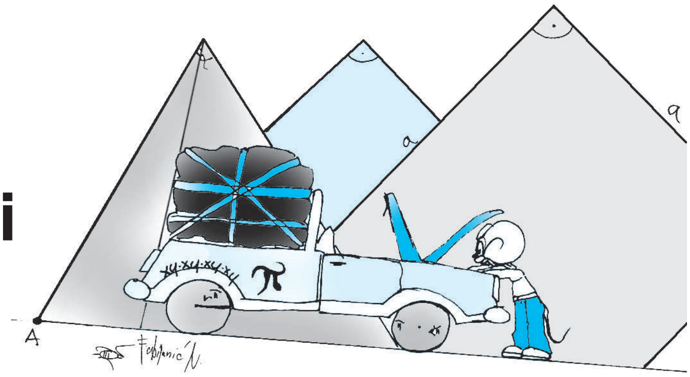
Mali matematički izlet



Anđelko Marić, Sinj

Rješavajući poneki matematički zadatak ili problem, katkada se zadivimo posebnošću tvrdnje, ili pak postupkom njegova rješavanja. Obično kažemo da je to "lijepi" zadatak, odnosno "lijepo" rješenje. Zato se samo po sebi postavlja pitanje: kako nastaju matematički zadaci i problemi? Odgovor na to pitanje nije ni jednostavan, a ni jednoznačan. Neki zadaci nastaju iz već postojećih. Najjednostavniji takav primjer su zadaci koji su poseban slučaj nekoga općenitijeg zadatka ili problema. Isto tako može se rješenje zadatka uzeti kao zadani uvjet, a u zadatku tražiti neki od zadanih podataka polaznoga zadatka. Može biti i obratno. Poopćenjem nekoga matematičkog zadatka može se postaviti novi matematički problem. Može se također, kombiniranjem dijelova dvaju ili više zadataka, oblikovati novi problemski zadatak. Naravno, da to nisu svi načini na koji može nastati matematički zadatak.

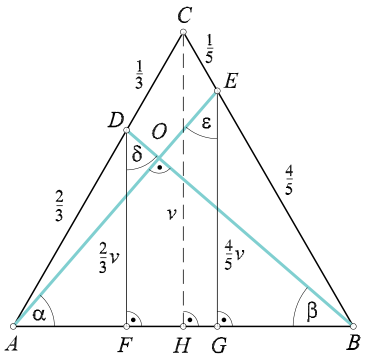
Međutim, novi matematički zadatak ili problem može nastati, rekli bismo, i sasvim slučajno. Naime, rješavajući neki zadatak ili problem, katkada se uoče neke relacije od kojih se može sastaviti novi zadatak ili problem koji u konačnici, nema nikakve veze s polaznim zadatkom.

U članku ćemo poći od jednoga jednostavnog geometrijskog zadatka. U poopćenju toga zadatka postavit ćemo problem postojanja relacije među zadanim parametrima. Taj, poopćeni, zadatak riješit ćemo dvjema različitim metodama i dobiti dvije relacije, koje, na prvi pogled, uopće nisu ekvivalentne. Na kraju ćemo, na temelju toga, sastaviti dva algebarska zadatka, koje bi i najiskusnije rješavatelji teško doveli u svezu s polaznim geometrijskim zadatkom.

Zadatak 1. *Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ jednakostraničnoga trokuta ABC, duljine stranica a, uzete su točke D i E tako da je $|AD| = \frac{2}{3}a$, $|BE| = \frac{4}{5}a$. Dokažite da su pravci AE i BD međusobno okomiti.*

Ovakvi zadaci se najčešće rješavaju vektorskom, analitičkom, ili pak trigonometrijskom, a vrlo rijetko planimetrijskom metodom. Ovaj se zadatak može riješiti tom metodom, primjenjujući Cavin, Van Aubelov i konačko Pitagorin poučak. Mi ćemo ga pak riješiti tako da ne prelazimo razinu učiva osnovne škole.

Koristimo oznake kao na sl. 1., gdje smo za jediničnu duljinu uzeli duljinu stranice trokuta ABC. Zato je $|AD|=\frac{2}{3}$, $|BE|=\frac{4}{5}$, $|CH|=v=\frac{\sqrt{3}}{2}$ i, zbog sličnosti, $|DF|=\frac{2}{3}v=\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $|EG|=\frac{4}{5}v=\frac{2\sqrt{3}}{5}$. Isto je tako $|AF|=\frac{2}{3}|AH|=\frac{1}{3}$ i $|BG|=\frac{4}{5}|BH|=\frac{2}{5}$. Zato je $|AG|=\frac{3}{5}$ i $|BF|=\frac{2}{3}$. Trokuti AGE i DFB su pravokutni i za omjer njihovih kateta vrijedi: $\frac{|EG|}{|AG|}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ i $\frac{|BF|}{|DF|}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Iz jednakosti ovih omjera zaključujemo da su ti trokuti slični. Zato je $\varepsilon=\sphericalangle GEA=\sphericalangle FBD=\beta$. No, kako je $\alpha+\varepsilon=90°$, to je i $\alpha+\beta=90°$, što znači da je treći kut trokuta ABO pravi, to jest pravci AE i BD su međusobno okomiti.

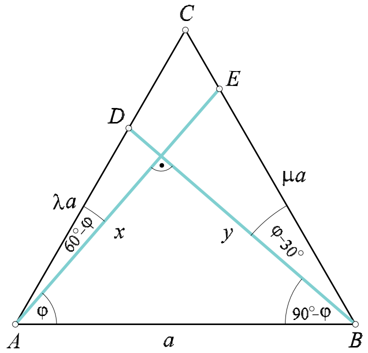


Slika 1.

Razmišljajući o ovom zadatku, logično je postaviti pitanje: gdje sve mogu biti točke D i E na stranicama $\overline{AC}$, odnosno $\overline{BC}$, da pravci AE i BD budu međusobno okomiti. Zato možemo poopćenjem postaviti novi problemski zadatak.

Zadatak 2. *Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ jednakostraničnoga trokuta ABC, duljine stranice a, uzete su točke D i E, tako da je $|AD|=\lambda a$ i $|BE|=\mu a$ $(\lambda,\mu\in\langle 0,1\rangle)$. Koju relaciju moraju zadovoljiti parametri λ i μ pa da pravci AE i BD budu međusobno okomiti?*

Zadatak riješimo najprije trigonometrijskom metodom. Označimo li $\sphericalangle EAB=\varphi$, tada su uz uvjet $AE\perp BD$ veličine kutova kao na sl. 2.



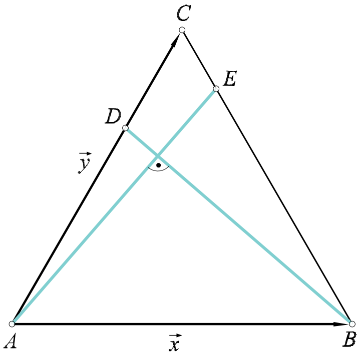
Slika 2.

Vrijedi: $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$. Isto je tako $x=\lambda a\cos(60°-\varphi)$, $y=\mu a\cos(\varphi-30°)$. Odavde dobijemo: $\cos(60°-\varphi)=\frac{\cos\varphi}{\lambda}$, $\cos(\varphi-30°)=\frac{\sin\varphi}{\mu}$, ili $\frac{1}{2}\cos\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi=\frac{\cos\varphi}{\lambda}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi=\frac{\sin\varphi}{\mu}$. Podijelimo li posljednje dvije jednadžbe s $\cos\varphi$, odnosno sa $\sin\varphi$ i pomnožimo s 2, dobit ćemo $\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi=\frac{2}{\lambda}-1$, $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\varphi=\frac{2}{\mu}-1$. Množenjem ovih dviju jednakosti, konačno dobijemo:

$$\left(\frac{2}{\lambda}-1\right)\left(\frac{2}{\mu}-1\right)=3. \qquad (1)$$

Relacija (1) je traženi uvjet za parametre λ i μ, da bi pravci AE i BD bili međusobno okomiti.

Riješimo zadatak 2. i vektorskom metodom. Neka je $\overrightarrow{AB}=\vec{x}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{y}$, tada je, zbog jednakostraničnosti trokuta ABC, $|\vec{x}|=|\vec{y}|=a$ i $\sphericalangle(\vec{x},\vec{y})=60° \implies \vec{x}\cdot\vec{y}=\frac{1}{2}a^2$ (vidi sl. 3.). Kako je $\overrightarrow{AD}=\lambda\vec{y}$ i $\overrightarrow{BE}=\mu(\vec{y}-\vec{x})$, to je $\overrightarrow{AE}=\vec{x}+\mu(\vec{y}-\vec{x})=(1-\mu)\vec{x}+\mu\vec{y}$ i $\overrightarrow{BD}=-\vec{x}+\lambda\vec{y}$. Iz $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ dobit ćemo:



Slika 3.

$-(1-\mu)a^2+\frac{1}{2}\lambda(1-\mu)a^2-\frac{1}{2}\mu a^2+\lambda\mu a^2 = 0$. Kako je $a \neq 0$, to je, nakon sređivanja, $\lambda+\mu+\lambda\mu-2=0$, što možemo pisati

$$1+\lambda+\mu+\lambda\mu = 3,$$

ili

$$(1+\lambda)(1+\mu) = 3. \qquad (2)$$

Dobili smo, uz isti uvjet za parametre λ i μ, da vrijedi relacija (2), koja se oblikom razlikuje od relacije (1). Ako dvjema različitim metodama dobijemo različita rješenja istoga zadatka, onda najprije pomislimo da smo negdje pogriješili. Međutim, uvrstimo li posebne vrijednosti $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{4}{5}$ iz polaznoga zadatka uvjerit ćemo se da one zadovoljavaju i relaciju (1) i relaciju (2). Može se pokazati da su te relacije, iako oblikom različite, ekvivalentne.

Zato možemo složiti dva nova algebarska zadatka koja je, kada ih se samostalno promatra, teško dovesti u vezu s polaznim geometrijskim zadatkom iz kojeg smo ih zapravo i dobili.

Zadatak 3. *Neka su, za $\lambda, \mu \in \mathbf{R}^+$, definirane relacije $(1+\lambda)(1+\mu) = 3$ i $\left(\frac{2}{\lambda}-1\right)\left(\frac{2}{\mu}-1\right) = 3$. Dokažite da su te relacije elvivalente.*

(Izostavili smo geometrijski uvjet za $\lambda, \mu \in \langle 0.1\rangle$ i proširili ga na sve realne pozitivne brojeve)

Zadatak 4. *Odredite realan broj a, da relacije $(1+\lambda)(1+\mu)=a$ i $\left(\frac{2}{\lambda}-1\right)\left(\frac{2}{\mu}-1\right)=a$, gdje je $\lambda, \mu \in \mathbf{R}^+$ budu ekvivalentne.*

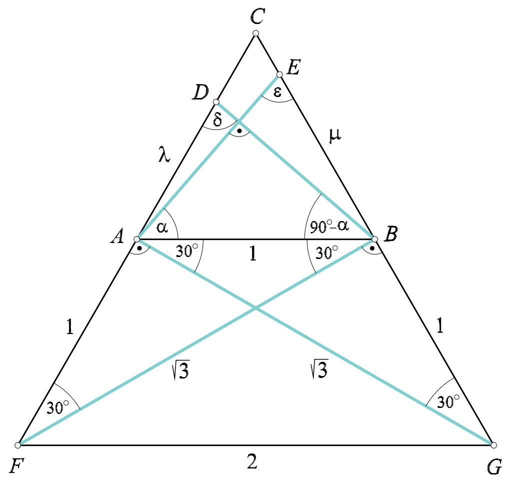
Naravno da je $a = 3$ rješenje ovoga zadatka. Međutim, na temelju svega izloženog ne možemo tvrditi da je to i jedino rješenje.

Ovi se zadaci mogu riješiti na više načina, što prepuštamo čitateljima. Ipak ćemo nešto otkriti: $a = 3$ je jedino rješenje zadatka 4.

Ovim bi, kako je zamišljen, članak bio završen. Međutim, stalno mi je navirala jedna misao. Zadatak 2. je po izričaju i po sadržaju planimetrijski. Zato se mora riješiti i planimetrijskom metodom.

Nakon nekoliko uzaludnih pokušaja, došla je prava zamisao. I evo "lijepog" rješenja.

Uzmemo li za jediničnu duljinu duljinu stranice promatranoga jednakostraničnog trokuta ABC, tada je $|AD| = \lambda$ i $|BE| = \mu$. Stranice $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$ produžimo preko vrhova A i B do točaka F i G da je $|AF| = |BG| = a = 1$, kao na sl. 4. Trokut AFB je jednakokračan, a kako je $\measuredangle BAF = 120°$, to je $\measuredangle AFB = \measuredangle ABF = 30°$. Zbog toga je $\measuredangle FAG = \measuredangle GBF = 90°$. Dužina $\overline{AB}$ je srednjica trokuta FGC, zbog čega je $|FG| = 2a = 2$. Primjenom Pitagorinog poučka dobijemo $|AG| = |BF| = \sqrt{3}$.



Slika 4.

Promatrajmo trokute AGE i DFB. Kutovi prvoga trokuta su: $\alpha + 30°$, $30°$ i ε. Zato je $\varepsilon = 120° - \alpha$. Kutovi trokuta DFB su δ, $30°$ i $120° - \alpha$, zbog čega je $\delta = 30° + \alpha$. Vidimo da se trokuti podudaraju u svim kutovima, zbog čega su slični. Zato vrijedi: $|DF| : |FB| = |AG| : |GE|$, ili $(1+\lambda) : \sqrt{3} = \sqrt{3} : (1+\mu)$, odakle je $(1+\lambda)(1+\mu) = 3$, što je relacija (2).

Još nekoliko riječi, umjesto zaključka.

Na ovom matematičkom izletu dogodilo nam se ono što se često dogodi i na svakom drugom. Razgledavajući neki objekt ili izložak, ponekad, uz nešto očekivano, zapazimo i ponešto neočekivano. Tako smo, promatrajući zadatak 1. došli do neočekivanih zadataka 3. i 4. Da je izlet još potrajao, možda bismo došli do neke zanimljive relacije u skupu jednakoosnih hiperbola. Relacije (1) i (2) upućuju, naime, na te krivulje. Ali, vrijeme izleta je isteklo.

* * *