Ekstrem kvadratne funkcije

Šime Šuljić, Zagreb

U drugom se razredu srednje škole proučava ekstrem i tijek kvadratne funkcije. Do svojstva ekstrema kvadratne funkcije dolazi se postupno, crtanjem grafova kvadratnih funkcija, počev od grafa funkcije $f(x) = x^2$ do općenito zadane funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dokazuje se da se tjeme parabole nalazi u točki: što se i uočava kroz mnoge primjere crtanja parabola. Temeljem toga dolazi se do zaključka da je ekstrem kvadratne funkcije u točki $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, a njegova vrijednost je $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4ac}$, odnosno $f(x_0)$. Nakon ovakvog, teoretskog razmatranja prelazi se na primjere vrlo zanimljive i primjenjive zadatke s ekstremom. Velik broj učenika rješava s lakoćom zadatke ovakvog tipa. Međutim, ma koliko izgledalo jednostavno primijeniti opisano znanje na zadatke, koji se svode na traženje ekstrema funkcije, praksa pokazuje da ima učenika, koji ne vide smisao onoga što rješavaju. Za one učenike koji pri rješavanju zadataka ovog tipa ne dođu do rezultata, moglo bi se slikovito kazati, da poteškoće na putu nekako i otklanjaju, ali nisu svjesni kamo ih vodi put.

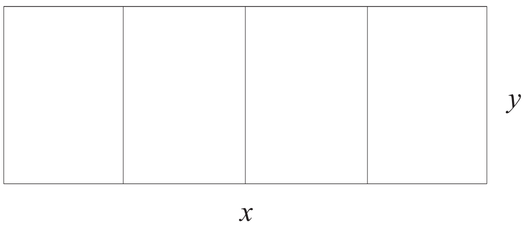
Osvrnuo bih se ovdje na četiri dobro poznata zadataka iz naših zbirki, ali bih pokušao pronaći različite pristupe tim zadatcima. Pritom bih se rukovodio s nekoliko načela.

1. Bar neki od zadataka s ekstremom kvadratne funkcije mogli bi se riješiti i prije nego se "teoretski" obradi pojam minimuma i maksimuma kvadratne funkcije. Zadatak s ekstremom može se postaviti kao problem i pokušati ga riješiti, makar približno s učeniku poznatim metodama. S kojim ciljem? Umjesto osobnog objašnjenja, radije bih citirao stav *Komisije za standarde Nacionalnog vijeća učitelja matematike SAD-a:* "Tradicionalni naglasci podučavanja na vježbanju u manipuliranju izraza i vježbanju algoritama kao predznanja za rješavanje problema, ignoriraju činjenicu da znanje često izlazi iz problema. Predlažemo da umjesto očekivanja kako umijeće računanja treba prethoditi verbalnim (tekstovnim) zadatcima, iskustvo s problemskim zadatcima pomaže razvoju sposobnosti računanja. Prema tome, sadašnje strategije podučavanja trebale bi biti izmjenjene; znanje bi trebalo proizaći iz rada na problemskim zadatcima. Ovako će učenici prepoznati potrebu za primjenom određenog pojma ili postupka i imat će jaku pojmovnu bazu za kasnije rekonstruiranje svog znanja."

2. Naglasak na zornosti i razumijevanju zadataka.

3. Pri rješavanju koristiti se kako različitim metodama tako i tehnologijom: džepnim računalima i računalima. Nekada su se računala koristila samo da bi olakšavala računanje i crtanje složenih procesa, koji bi inače bili mukotrpni i dugotrajni. Naravno, da i dalje tehniku treba koristiti i u ovom smislu, ali ovdje možemo računalom istraživati i samu prirodu problema u koji se upuštamo.

Zadatak 1. Žicom dugačkom 144 m treba ograditi četiri terena (vidi sliku 1.). Kako treba odabrati x i y da bi ukupna površina terena bila maksimalna?



Sl. 1.

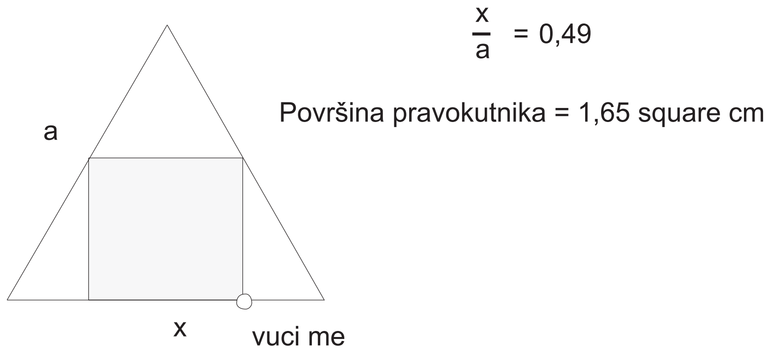
Ovaj zadatak zgodno je postaviti i prije nego se formalno obradi minimum i maksimum kvadratne funkcije. Iz slike se lako zaključuje da je $2x+3y=144$, a ukupna površina $P=xy$. Uz uporabu džepnog računala lako se ispuni tablica ovakvog oblika:

x	y	Ukupna površina
10	24.8	248
15	22.8	342
20	20.8	416
25	18.8	470
30	16.8	504
35	14.8	518
40	12.8	512
45	10.8	486
50	8.8	486

Pritom, dovoljno je da se učenicima daju samo vrijednosti x, ili čak ni to, već se zatraži da sami naprave tablicu različitih vrijednosti x, y i ukupne površine. Iz tablice je vidljivo da je najveća ukupna površina za vrijednosti x između 35 i 40. Proračun se sada može napraviti za diskretne vrijednosti x između 35 i 40 dok se ne dobije maksimalna površina. Ovakvim postupkom izražava se površina kao funkcija varijable x i lako se uočava da ima ekstrem. Nakon formalne obrade ekstrema kvadratne funkcije, lako će se shvatiti što na ovom primjeru znači vrijednost $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, za funkciju $P(x)=-\dfrac{2}{5}x^2+\dfrac{144}{5}x$.

Zadatak 2. U jednakostranični trokut duljine a upisan je pravokutnik čija je jedna stranica na stranici trokuta, a dva ostala vrha pripadaju po jednoj od ostalih dviju stranica. Koji od takvih pravokutnika imaju najveću površinu?

Većina učenika točno će skicirati traženi pravokutnik s vrhovima na stranicama jednakostraničnog trokuta. Ali na skici, bila ona u bilježnici ili na ploči, nalazi se samo jedan pravokutnik. Idealno bi bilo sada pozvati u pomoć dinamičnu geometriju tj. računalo i računalni program *The Geometer's Sketchpad*. Mnogi će čitatelj, na ovakav prijedlog, odmahnuti rukom i pomisliti kako je



Sl. 2.

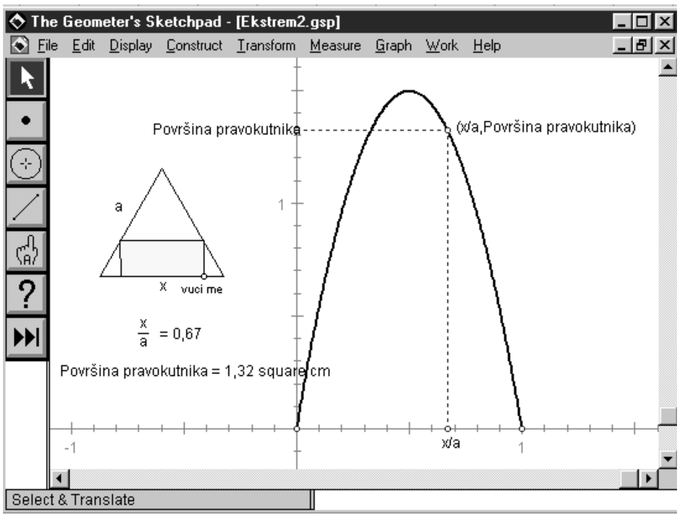
na njegovoj školi to daleka budućnost. Uvjeren sam da mnoge škole mogu u matematičkoj učionici imati jedno staro računalo, na kojem spomenuti program dobro radi. Ta starija računala, ako već nisu bačena obično skupljaju prašinu u kakvom kutu škole, a mogla bi poslužiti kao izvanredan alat za zornu predodžbu.

U *Sketchpadu* se konstruira jednakostraničan trokut, upravo onako kako bismo ga konstruirali šestarom na papiru. Na jednoj se stranici nacrta točka, kroz tu točku se povuče okomica i gdje ona siječe drugu stranicu drugi je vrh pravokutnika. Okomito na taj pravac u drugom vrhu pravokutnika ponovo se povuče nova okomica, koja siječe novu stranicu. Postupak nastavimo dok ne zatvorimo pravokutnik. Dobivene pravce sakrijemo, a vrhove pravokutnika spojimo dužinama. Klikom na stranicu trokuta i stranicu pravokutnika izmjeri se njihova duljina. Uz pomoć *Sketchpadovog* kalkulatora izračuna se omjer duljine stranice pravokutnika i stranice trokuta. Označivši vrhove pravokutnika izmjeri se njegova površina. Dobiva se pritom slika izgledom kao slika 2., ali sa dinamičnim svojstvima. Točka označena s "vuci me" se zaista može povlačiti, pritom dobivamo različite pravokutnike koji svi ispunjaju uvjete zadatka. Usput se mijenjaju izmjerena površina i omjer x/a. Uz pomoć ove simulacije i malo koncentracije (miš računala nije precizan!) zaista se može odrediti za koji je x površina najveća i koliko iznosi. To nikako ne znači da ne treba posegnuti za čisto matematičkim modelom rješenja ili da će učenicima biti dosadno računati vrijednost maksimuma pomoću ekstrema funkcije. Naprotiv, učenici će rado htjeti dokazati, ono što su ovakvom simulacijom, kao rezultat već naslutili. S druge strane, iskustvo mi govori da im jako odgovara, bar ponekad, provjeriti rezultat klikom na zaslon računala umjesto pogledati u rješenja zbirke.

Uz pomoć *Sketchpada* s lakoćom se, i za svega par minuta, dobije niz mjerenja prikazanih u tablici. Dovoljno je samo dati naredbu *Tabulate* za željena mjerenja, a zatim uljučivati opciju *Add Entry*, dok se pomiče točka "vuci me". I bez računala u učionici sada se ovom zadatku može pristupiti problemski.

x/a	Površina pravokutnika
0.10	2.25
0.20	3.95
0.30	5.17
0.40	5.97
0.50	6.20
0.60	5.95
0.70	5.22
0.80	4.02
0.90	2.16

Učenicima se može dati ispisana tablica



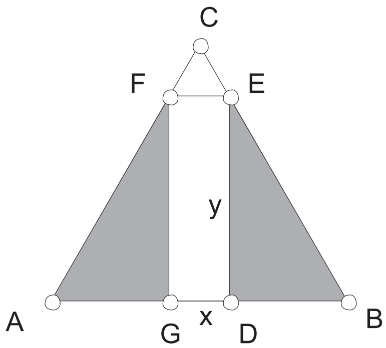
Sl. 3.

i zatražiti da nacrtaju u koordinatnom sustavu graf funkcije zadane tablično. Iz grafa se zatim očitava i najveća vrijednost funkcije (površine). Valja voditi računa da su dane tablične vrijednosti približno točne, jer su dobivene pomakom miša. No, ta netočnost u stotinkama neće smetati za crtež učenika.

I u samom programu se može prikazati graf funkcije i to na "vrlo geometrijski" način (sl. 3.). Dovoljno je redom odabrati mjerenja x/a i površinu pravokutnika, a zatim klikom na naredbu *Plot As (x,y)* u *Graf* izborniku dobije se točka čije su koordinate *(x/a, površinu pravokutnika)*. Dok je ta točka selektirana klikne se na naredbu *TracePoint* u *Display* izborniku. Kako se povlači točka "vuci me" tako točka *(x/a, površinu pravokutnika)* u kordinatnom sustavu "piše" parabolu.

Pri rješavanju ovog zadatka, uz primjenu znanja o ekstremu funkcije, potrebno je otkriti površinu upisanog pravokutnika, odnosno njegovu drugu stranicu, ako je prva x. Skica u dinamičnom okruženju *Sketchpada* može biti od velike koristi. Pomicanjem točke D po stranici AB, lako je sugerirati da pravokutni trokuti AGF i BED čine spojeni jednakostraničan trokut stranice $a-x$. Stoga je stranica y pravokutnika jednaka visini jednakostraničnog trokuta: $y=\dfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{3}$.

Površina pravokutnika je:
$P(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+\dfrac{a\sqrt{3}}{2}x$, koja poprima maksimum za $x=a/2$.

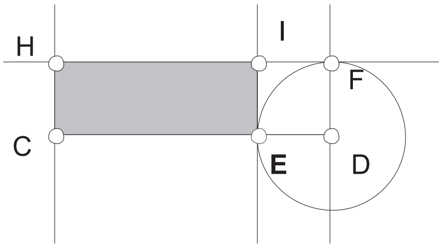


Sl. 4.

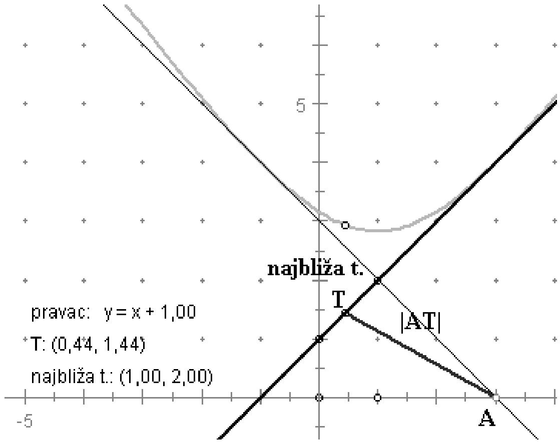
Zadatak 3. Koji od pravokutnika zadanog opsega ima najveću površinu?

Ovaj zadatak moguće je na sličan način obraditi kao prethodni. Međutim, vizualizacija pravokutnika konstantnog opsega, a promjenljive površine je ono što se samo u okruženju dinamične geometrije može postići. Sama konstrukcija, koja polazi od poluopsega CD pravokutnika, vrlo je zanimljiva.

Točka E (na slici 5.) rubna je točka kružnice, a ujedno dijeli poluopseg na dvije stranice pravokutnika. Pomicanjem točke E stranice mijenjaju veličine, ali njihov zbroj je konstantan.



Sl. 5.



Sl. 6.

Zadatak 4. Koja je točka pravca $y = x + 1$ najbliža točki $A(3, 0)$?

Točka pravca oblika je $T(x, x+1)$. Udaljenost točaka je $|TA|^2 = (x-3)^2+(x+1)^2 = 2x^2-4x+10$. Minimum te funkcije nalazi se u točki $x_0 = 1$, pa je i najbliža točka pravca $T(1, 2)$.

Pri rješavanju ovog zadatka kod učenika sam primjetio "otpor", da se zadatak riješi uz pomoć ekstrema. To mi je shvatljivo, jer je nametljivo analitičko rješenje, po kojem je najbliža točka sjecište pravca i okomice iz točke A na taj pravac. Možda je dobro pustiti učenike da najprije zadatak riješe analitički, a potom uz pomoć ekstrema. Moguće je da se na taj način izbjegne čest pogrešan odgovor da je najbliža točka pravca točka $T(1, 8)$, koja naravno nije uopće točka pravca. Vrijednost 8, koja se dobije kada se uvrsti $x_0 = 1$ u funkciju $f(x) = 2x^2 - 4x + 10$, zapravo je udaljenost točaka A i T. Za otklanjanje ovih problema dovoljan je običan crtež u koordinatnom sustavu. No, moć animacije, koju se može postići u *Sketchpadu* je još upečatljivija. Na crtežu koji slijedi, nažalost, ne može se vidjeti kao na zaslonu računala kako točka T sama "šeta" po pravcu.

U *Sketchpadu* se ovaj zadatak može prikazati (ali i riješiti) i analitički i pomoću ekstrema. Ali i više od toga, može se lako kreirati i nove zadatke slične ovom zadatku. Zadani pravac se može pomicati po koordinatnom sustavu i mijenjati njegov nagib, a pritom će se mijenjati i njegova prikazana jednadžba. Kako su za koeficijent smjera i odsječak na ordinati povoljni samo cijeli brojevi ili "razumni" decimalni brojevi, potrebno je uključiti opciju *Snap To Grid*. Isto vrijedi za točku A. Parabola na slici prikazuje funkciju udaljenosti, koja sve nastale promjene prati.

Na kraju citirao bih već spomenute *Standarde nastave matematike:* "Suprotno strahovima mnogih, dostupnost džepnih računala i računala proširila je učeničku sposobnost računanja. Nema dokaza koji bi potvrdio da dostupnost džepnih računala čini učenike ovisnima o njima za jednostavna računanja. Učenici bi trebali biti sposobni odlučiti kada trebaju računati i je li im potreban točan ili približan odgovor. Oni bi trebali biti sposobni izabrati i uporabiti pristupačan alat. Učenici bi trebali imati uravnotežen pristup računanju, izabrati pravilne postupke, naći odgovore i prosuditi valjanost tih odgovora."

Literatura

[1] Dakić, Branimir: *Matematika 2, zbirka zadataka za 2. razred gimnazije*, Element, Zagreb.

[2] Šikić, Zvonimir: *Matematika 2, udžbenik i vježbenica za drugi razred četverogodišnjih strukovnih i tehničkih škola*, Profil, Zagreb.

[3] *Standardi za nastavu matematike*, HMD i V. gimnazija, Zagreb.

[4] *The Geometer's Sketchpad, User Guide and Reference Manual*, Key Curriculum Press.