Prva natjecanja srednjoškolaca

U MŠ-u smo već pisali o prvom natjecanju u matematici učenika hrvatskih osnovnih škola. Evo priloga o prvim natjecanjima srednjoškolaca. Tekst je pripremljen prema članku što ga je u Matematičko–fizičkom listu 1959. godine objavio Vladimir Benčić.

Društvo matematičara i fizičara Narodne republike Hrvatske u studenom i prosincu 1958. organiziralo je prvo natjecanje u matematici učenika zagrebačkih gimnazija. Natjecanje je imalo dva dijela. Najprije su provedena natjecanja po pojedinim gimnazijama. U tim je natjecanjima sudjelovalo oko 350 učenika, a u pojedinom uzrastu po razredu su se natjecala najviše po tri učenika. Natjecanje je provedeno za učenike VI., VII. i VIII. razreda (danas II., III. i IV.) Po dva najuspješnija natjecatelja iz pojedinog razreda svake škole, njih ukupno 48, sudjelovalo je na završnom natjecanju.

Evo i zadataka.

VI. razred

1. Pojednostavni razlomak:

$$\frac{\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{4x}+\dfrac{x}{4}-x\right)}{\left(\dfrac{1+x}{2-2x}-\dfrac{1-x}{2+2x}-\dfrac{2x^2}{x^2-1}\right)\cdot\dfrac{1-x}{2x}}.$$

2. Riješi sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} x+y+z&=a-1\\ x+2y+3z&=2a\\ x+4y+4z&=3a. \end{aligned}$$

Odredi a tako da rješenje sustava bude trojka negativnih brojeva.

3. Zadan je polukrug polumjera r i na njemu točka T koja se projicira na promjer AB u točki N. Nacrtaj $AT = TC$ i $BT = TD$.

a) Pokaži da je $ABCD$ romb. Može li lik $ABCD$ biti i kvadrat?

b) Odredi geometrijsko mjesto vrhova C i D, ako se T kreće po polukružnici.

c) Kolika je površina lika $ABCD$, ako je $TN = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$?

4. Konstruiraj trokut ako je zadano: $a, c-b$ i kut α.

VII. razred

1. U jednadžbi $(2a-1)x^2-(3a+2)x+1+5a=0$ odredi a tako da jedno rješenje bude $\frac{2}{3}$ drugoga.

2. Riješi jednadžbu:

$$\log_4\{2\log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)]\}=\frac{1}{2}.$$

3. U kružni odsječak, kome je središnji kut 120°, upisan je kvadrat sa stranicom od 3 cm. Nađi polumjer kružnice.

4. Tetraedar upisan u kugli polumjera r presiječe se u raspolovištu visine ravninom paralelnom s osnovicom tetraedra. Kako se odnose obujmovi segmenata u koje se kugla tim presjekom raspada?

VIII. razred

1. Pravac $5x-6y+15=0$ siječe os x u točki A, pravac $x+y-8=0$ siječe je u točki B. Sjecištem C tih pravaca povuci pravac koji dijeli

a) površinu trokuta ABC,
b) stranicu AB,
c) kut ACB,

na dva jednaka dijela. Kako glase jednadžbe tih pravaca?

2. U istokračni trokut stranice a i kuta na vrhu 2α, upisani su kvadrati tako da im se po dvije stranice dodiruju, gornji vrhovi da padaju u krakove istokračnog trokuta. Dokaži da površine tih kvadrata čine konvergentni geometrijski niz za svako moguće 2α. Kolika je suma tog niza?

3. U trokutu je zadano: $c=40$, $P=240$, $\gamma=93°41'43''$. Kolike su ostale stranice i kutovi?

4. Riješi jednadžbu:

$$\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{4\cos^2 x}=\sin(x+30°)\cdot\sin(x-30°).$$

* * *

Rezultati natjecanja proglašeni su u Matematičkom institutu na priredbi održanoj 22. prosinca. Tom je prilikom prof. dr. Đ. Kurepa natjecateljima održao kraće predavanje "O suvremenoj ulozi matematike."

Predsjednik Društva prof. dr. B. Maksić pobjednicima je podijelio za nagradu knjige.

A evo tko su bili nagrađeni:

VI. razred: Vesna Herkov (III. gimnazija), Danko Končar (VII. g.), Vladimir Paar (V. g.).

VII. razred: Dragan Vidlanović (I. g.), Željko Jelovica (IV. g.), Magdalena Galunić (III. g.).

VIII. razred: Josip Handeković (II. g.), Petar Bodlović (I. g.), Nino Mardešić (III. g.).

* * *

Sljedeće godine natjecanje je prošireno na sve gimnazije u Hrvatskoj pa se nakon provedenih natjecanja po pojedinim školama u Zagrebu u velikoj dvorani Fizičkog instituta (Marulićev trg 19.) 25. listopada 1959. okupilo 70 učenika II., III. i IV. razreda iz osam zagrebačkih i devet gimnazija izvan Zagreba na *Prvom republičkom natjecanju u matematici*. S gimnazija iz Bjelovara, Đakova, Koprivnice, Križevaca, Rijeke, Sinja, Splita, Virovitice i Vukovara na tom su natjecanju sudjelovala 23 učenika.

Evo zadataka i s ovog natjecanja:

II. razred

1. Rastavi na faktore:

$$(18x^3+4b^3)^2-(9a^3-5b^3)^2.$$

2. Za koje vrijednosti od m su rješenja skupa jednadžbi

$$x(1-m)+y=1+2m$$
$$x(1+m)-2y=1-2m$$

pozitivna?

3. Konstruiraj istokračni trapez kojem su zadane baze a i c i dijagonala e i izračunaj mu površinu (specijalno $a = 36$, $c = 12$, $e = 25$).

4. Konstruiraj trokut kome je zadano: c, $a + b$, v_b.

5. Kakav geometrijski lik može biti ortogonalna projekcija kvadrata na ravninu, ako se kvadrat nalazi u različitim položajima prema ravnini proiciranja? Opiši te likove.

III. razred

1. U jednadžbi $x^2+(m-3)x+1-2m = 0$ odredi m tako, da između korijena postoji relacija $\frac{x_1}{2x_2} + \frac{x_2}{2x_1} = -3$.

2. Riješi jednadžbu:

$$(a-1)^2x^2+2x(a-1)(2a-3)-5(4a-1) = 0,$$

i uvjeri se pomoću Vièteovih formula o ispravnosti rezultata.

3. U uspravnom je stošcu kut na vrhu osnog presjeka α, polumjer oko osnog presjeka opisanog kruga je r. Koliko je oplošje i obujam stošca? (Specijalno, ako je $\alpha = 37°26'$, $r = 5.6$ cm.)

4. Rijeka teče prema jugu brzinom od 1.25 m/ s. Motorni čamac se giba brzinom od 4.75 m/ s u mirnoj vodi. On se giba prema istoku.

a) Nađi smjer (izražen veličinom kuta), po kojem će se čamac gibati i njegovu brzinu.

b) U kojem bi se smjeru morao uputiti čamac, da se giba točno prema istoku? Kolika je njegova brzina prema istoku?

5. Nad stranicama trokuta ABC konstruirani su slični pravokutnici. Kakva relacija mora postojati među stranicama toga trokuta želimo li da površina pravokutnika nad najvećom stranicom bude jednaka sumi površina nad ostalim dvjema stranicama?

IV. razred

1. Odredi x u izrazu $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}} + \frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$, tako da 3. član bude jednak 240.

2. U jednadžbi $x^4-(2m-6)x^2+60m+9 = 0$ odredi m tako da korijeni te jednadžbe čine aritmetički niz.

3. Točkom $T(3,4)$ neka se povuče pravac koji s pravcima $3x - 2y + 12 = 0$, $3x + 2y + 6 = 0$ čini jednake kutove. Riješi zadatak također grafički.

4. Riješi trokut ako je zadano: a, α, ρ, ($\rho = 16$, $\alpha = 53°7'48''$, $a = 52$.)

5. Tri kruga polumjera $r_1 = 50$, $r_2 = 30$, $r_3 = 20$ dodiruju se izvana. Nađi površinu lika kojeg omeđuju ova tri kruga.

* * *

Zanimljivo je da uspješnost natjecatelja na ovom natjecanju nije bila osobita. Ukupan broj osvojenih bodova u II. razredu bio je 26.5%, u III. razredu 32.6%, a u četvrtom 26.7%.

Rezultati natjecanja proglašeni su na priredbi 13. studenog 1959. a pobjednici su bili:

II. razred: Vladimira Benčić (II. g. Zagreb), Marija Jerman (VII. g. Zagreb), Vladimir Volenec (Gimnazija Virovitica).

III. razred: Vladimir Paar (V. g. Zagreb), Boris Beraković (II. g. Zagreb), Zdenko Mitar (VI. g. Zagreb).

IV. razred: Neven Karlovac (Gimnazija "V. Nazor", Split), Miroslav Furić (I. g. Zagreb), Ljubo Marangunić (II. g. Zagreb).

Uz ove učenike za tadašnje Savezno natjecanje izabrani su još i Mladen Imenšek (VII. g. Zagreb), Vesna Herkov (III. g. Zagreb), Jasna Tišov (Gimnazija Vukovar) i Sonja Flego (II. g. Zagreb).