Šeširi

Kralj pozove najbolje matematičare svojeg kraljevstva pa im kaže:

Stavit ću svakom od vas na glavu šešir, nekom bijeli , nekom crni. Potom ću otići i navraćati do vas svakog punog sata. Svaki put kad svratim neka mi se jave svi oni koji su zaključili da na glavi imaju bijeli šešir.

Ako matematičari međusobno ne razgovaraju, nijedan od njih ne može vidjeti šešir na svojoj glavi, dakle, zadatak mogu riješiti isključivo razmišljajući, dokažimo kako će se kralju nakon točno n-tog njegovog obilaska javiti svih n matematičara kojima je na glavi bijeli šešir.

Pretpostavimo da je $n = 1$, tj. da je na glavi samo jednog matematičara bijeli šešir.

Budući da je kralj rekao kako je matematičarima stavio bijele i crne šešire, onaj kojemu je na glavi bijeli šešir vidi na glavama ostalih sve same crne šešire. Zaključuje kako je na njegovoj glavi bijeli šešir i to priopći kralju pri njegovom prvom navraćanju.

Razmotrimo još i slučaj kada su točno dva bijela šešira, jedan na glavi matematičara α, drugi na glavi matematičara β. Kad kralj prvi puta navrati, obojica šute. Svaki od njih dvojice vidi da je na glavama ostalih jedan bijeli i ostalo sve crni šeširi, ali nije siguran kakav je šešir na njegovoj glavi.

Nakon drugog obilaska obojica se jave kralju. Matematičar α je razmislio: *Kad bih ja imao crni šešir, β bi to vidio, jer bi vidio same crne šešire, i bio bi se javio kralju već pri prvom obilasku. Kako nije, ja nosim bijeli šešir.*

Jednako tako zaključuje i β.

Pretpostavimo sada da je kralj podijelio k bijelih šešira i da su mu se pri njegovom k-tom obilasku javili svih k matematičara koji imaju na glavi bijele šešire.

Dokažimo da iz ove pretpostavke slijedi: Ako kralj podijeli $k+1$ bijeli šešir, tada će se svih $k+1$ matematičara s bijelim šeširima na glavi javiti kralju pri njegovom $(k+1)$-vom obilasku.

Svaki od onih s bijelim šeširom vidi da k njegovih kolega ima bijeli šešir. On dakako ne zna kakav je šešir na njegovoj glavi, pa pri prvom obilasku kralja on šuti. On će šutjeti i pri drugom, trećem, četvrtom i sve tako do k-tog obilaska, nakon kojeg razmišlja:

Kad na mojoj glavi ne bi bio bijeli šešir, onda bi bilo ukupno k bijelih šešira, pa bi prema pretpostavci svi oni koji nose bijele šešire obavijestili kralja pri njegovom k-tom navraćanju. A oni to nisu učinili. Na mojoj je glavi dakle bijeli šešir i ja ću to reći kralju kad sljedeći put navrati.

Tako razmišljaju i svi ostali matematičari s bijelim šeširima.

Time je tvrdnja zadatka dokazana.