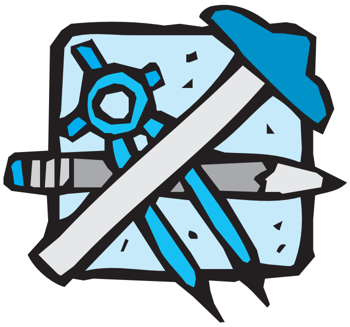
Lorenzo Mascheroni i geometrija šestara



Mirela i Željka Kurnik, Zagreb

Rijetko se dešava da se u jednoj godini objedine dvije obljetnice istog čovjeka. Ove godine bi Lorenzo Mascheroni imao 250 godina da nije već 200 godina mrtav.

L. Mascheroni, talijanski matematičar i pjesnik, rođen je 14. 5. 1750. u mjestu Castagneto blizu Bergama. Kao mlad čovjek zaredio se za svećenika. Jedno vrijeme radi kao profesor grčkog i poezije u Bergamu. Matematiku je otkrio relativno kasno, ali ubrzo nakon studija postaje profesor algebre i geometrije u Paviji. Poznato je njegovo veliko prijateljstvo s Napoleonom (upoznali su se kada je Napoleon osvojio sjevernu Italiju), kojeg je toliko cijenio da mu je u svojim knjigama pisao posvete u stihovima.

Najpoznatije dostignuće u matematici su njegovi rezultati u tzv. geometriji šestara, koje je objavio u knjizi *Geometria del compasso* (Pavija, 1797.). U matematičkoj analizi proučavao je Eulerova dostignuća (*Adnotationes ad Calcuclum Integrale Euleri*, 1790.; Mascheronijeva konstanta $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = 0.57721566\ldots$), a osim pjesništva i matematike zanimala ga je i fizika (*Nuove Ricerchi su L'equilibrio delle vòlte*, 1785.). Bio je član međunarodne komisije za uvođenje metričkog sustava u Francuskoj. Umro je 30. 7. 1800. u Parizu.

* * *

Ako bi se na satu matematike postavio zadatak: "Objasnite kako se konstruiraju sjecišta pravca i kružnice", većina naših učenika mislila bi da se šalimo jer je za njih ta konstrukcija očita. Šestarom se konstruira kružnica, a ravnalom povuče pravac i sjecišta su tu. (Mali problem diskusije kada ima sjecišta i koliko ih je, ovdje ćemo zanemariti.) A na pitanje: "Kako riješiti isti zadatak samo upotrebom šestara?" He.... Situacija bi postala vrlo zanimljiva. Prvo bi bila potpuna tišina, a onda bi (nadamo se) počela pljuštati pitanja: "Kako se može konstruirati pravac samo šestarom? Što to znači? Da li je to moguće?..."

Da je to moguće, potvrđuje sljedeći teorem:

Teorem. *Sve konstrukcije koje se mogu izvesti ravnalom i šestarom, mogu se izvesti i samo šestarom.*

Poznato je da se sve euklidske konstrukcije (ravnalom i šestarom) mogu svesti na pet osnovnih konstrukcija:

(1) konstrukcija pravca kroz dvije točke A i B, p_{AB};

(2) konstrukcija kružnice danog središta S i polumjera r, $k(S,r)$;

(3) konstrukcija sjecišta dviju kružnica zadanih središta i polumjera;

(4) konstrukcija sjecišta pravca i kružnice;

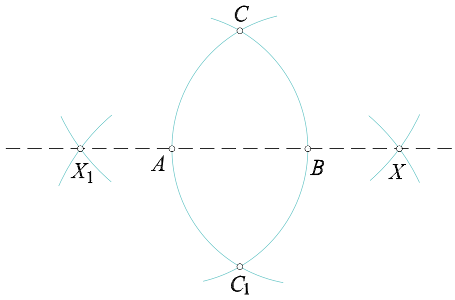
(5) konstrukcija sjecišta dvaju pravaca.

Ako dokažemo da se ove osnovne konstrukcije mogu izvesti samo šestarom, dokazali smo teorem. Odmah uočavamo da su konstrukcije (2) i (3) očite. A prije osnovne konstrukcije (1) treba primijetiti da pravac ne možemo nacrtati (jer nemamo ravnalo), ali smatramo da je pravac zadan (određen) ako su mu poznate dvije točke.

1) Konstrukcija pravca kroz dvije točke

Neka je zadan pravac sa svoje dvije točke A i B. Konstrukcija tog pravca znači određivanje proizvoljnog broja točaka tog pravca.

Konstrukcija:



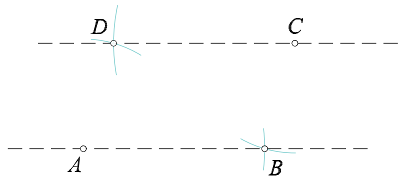
Sl. 1.

Oko točke A opiše se kružnica polumjera $|AB|$, a oko točke B opiše se kružnica istog polumjera. Te dvije kružnice sijeku se u točkama C i C_1. Presiječemo kružnice $k(C,d)$ i $k(C_1,d)$ (d je polumjer veći od udaljenosti točke C od pravca p_{AB}). Njihova sjecišta X i X_1 su točke pravca p_{AB}.

Dokaz. Točke C i C_1 su simetrične u odnosu na pravac p_{AB}, pa je p_{AB} simetrala dužine $\overline{CC_1}$. Tada je on skup svih točaka ravnine jednako udaljenih od C i C_1, pa su X i X_1 na tom pravcu. ■

Primjer 1. Zadan je pravac točkama A i B. Konstruirajmo paralelni pravac točkom C (koja ne leži na p_{AB}).

Konstrukcija:



Sl. 2.

Oko točke C povučemo kružni luk polumjera $|AB|$, a oko točke A kružni luk polumjera $|BC|$. Sjecište D tih lukova je četvrti vrh paralelograma $ABCD$ i točka koja zajedno s C određuje traženu paralelu.

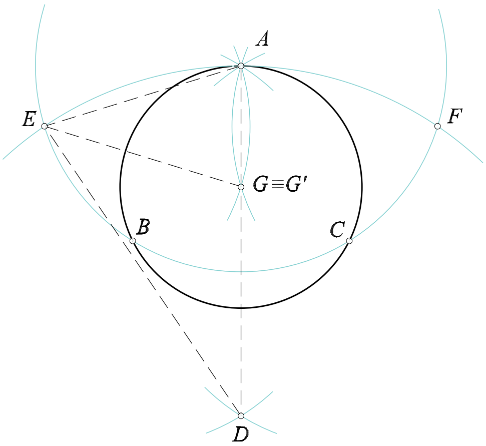
Zadatak 1. Konstruirajte okomicu na pravac zadan točkama A i B koja prolazi točkom C.

Zadatak 2. Neka su zadane dvije dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Ako je $|AB| = a$ i $|CD| = b$ i $a > b$, konstruirajte dužinu duljine:

1) $a + b$; 2) $a - b$.

Primjer 2. Konstruirajmo središte nacrtane kružnice k.

Konstrukcija:



Sl. 3.

Na kružnici odaberemo bilo koju točku (točka A) i oko nje opišemo kružni luk polumjera manjeg od promjera kružnice k. Sjecišta s kružnicom su točke B i C. Kružnice $k(B, |AB|)$ i $k(C, |AB|)$ sijeku se još i u točki D. Kružnica $k(D, |AD|)$ siječe kružnicu $k(A, |AB|)$ u točkama E i F. Kružnice $k(E, |AE|)$ i $k(F, |AE|)$ sijeku se još i u točki G koja je traženo središte kružnice k.

Dokaz. Zbog simetrije točka G leži na pravcu p_{AD}. Trokuti AGE i AED su slični jer su jednakokračni i imaju jednake kutove uz baze $\overline{AG}$ i $\overline{AE}$. Tada je

$$|AG| : |AE| = |AE| : |AD|,$$

$$\text{tj. } |AG| = \frac{|AE|^2}{|AD|}.$$

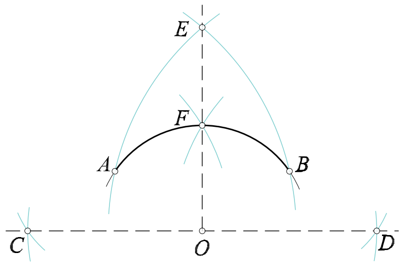
S druge strane, neka je G' središte dane kružnice. Tada su trokuti ABG' i DAB slični jer su jednakokračni i sa zajedničkim kutom $\measuredangle DAB$. Zbog sličnosti vrijedi:

$$|AG'| : |AB| = |AB| : |AD|,$$

tj. $|AG'| = \dfrac{|AB|^2}{|AD|} = \dfrac{|AE|^2}{|AD|} = |AG|$. Odavde slijedi da je $G \equiv G'$. ■

Primjer 3. Konstruirajmo polovište kružnog luka $\overset{\frown}{AB}$.

Konstrukcija:

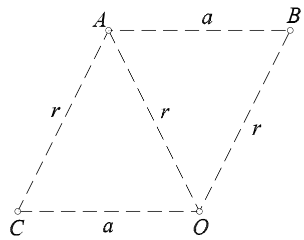


Sl. 4.

Neka je O središte kružnice na kojoj leži luk $\overset{\frown}{AB}$. Ako ta točka nije zadana, konstruiramo je (pr. 2). Odredimo točke C i D tako da su $ABOC$ i $ABDO$ paralelogrami (pr. 1). Tada su C, O i D kolinearne točke. Presiječemo kružnice $k(C, |BC|)$ i $k(D, |AD|)$ u točki E, a zatim presiječemo kružnice $k(C, |OE|)$ i $k(D, |OE|)$ u točki F. Točka F je polovište luka $\overset{\frown}{AB}$.

Dokaz. Već smo uočili da su točke C, O i D kolinearne. Trokuti CED i CFD su jednakokračni pa je $\measuredangle COE = \measuredangle COF = 90°$ (točka O je polovište dužine $\overline{CD}$) i vrijedi da je $\overline{OF} \perp \overline{AB}$.

Ako pokažemo da je $|OF| = r$ (r je polumjer zadanog luka $\overset{\frown}{AB}$), onda možemo zaključiti da je F polovište luka $\overset{\frown}{AB}$.



Sl. 5.

Neka je $|AB| = a$ i promotrimo paralelogram $ABOC$. U njemu vrijedi:

$$|OA|^2 + |BC|^2 = 2|OB|^2 + 2|AB|^2$$
$$r^2 + |BC|^2 = 2r^2 + 2a^2$$
$$|BC|^2 = r^2 + 2a^2.$$

Trokut COE je pravokutan pa je

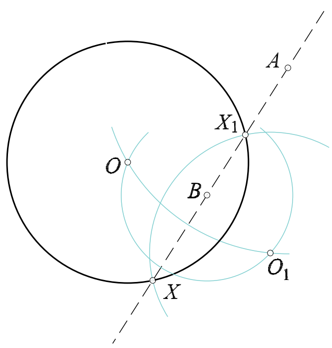
$$|CE|^2 = |CO|^2 + |OE|^2$$
$$|CB|^2 = a^2 + |OE|^2$$
$$r^2 + 2a^2 = a^2 + |OE|^2$$
$$|OE|^2 = a^2 + r^2.$$

Trokut COF je pravokutan pa je $|OF|^2 = |CF|^2 - |CO|^2 = |OE|^2 - a^2 = a^2 + r^2 - a^2 = r^2$, tj. $|OF| = r$. ■

4) Konstrukcija sjecišta zadane kružnice $k(O, r)$ i pravca zadanog točkama A i B, p_{AB}

1. slučaj: točke A, B i O nisu kolinearne.

Konstrukcija:



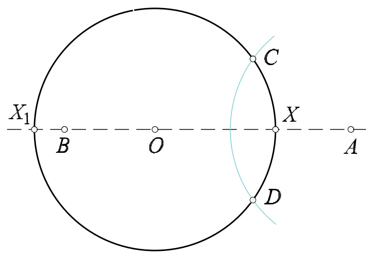
Sl. 6.

Konstruiramo simetričnu točku O_1 točki O s obzirom na pravac p_{AB} kao presjek kružnica $k(A, |OA|)$ i $k(B, |OB|)$. Zatim presiječemo kružnice $k(O_1, r)$ i $k(O, r)$ u točkama X i X_1. Točke X i X_1 su tražene točke.

Dokaz. Iz konstrukcije je vidljivo da je p_{AB} simetrala dužine $\overline{OO_1}$. Točke X i X_1 su jednako (za r) udaljene od točaka O i O_1, pa slijedi da one leže na simetrali dužine OO_1, tj. one se nalaze na pravcu p_{AB}.

2. slučaj: točke A, B i O su kolinearne.

Konstrukcija: Odaberemo proizvoljan polumjer i njime iz točke A presiječemo kružnicu $k(O, r)$ u točkama C i D. Tražena sjecišta X i X_1 su polovišta lukova $\overset{\frown}{CD}$ i $\overset{\frown}{DC}$ (pr. 3).

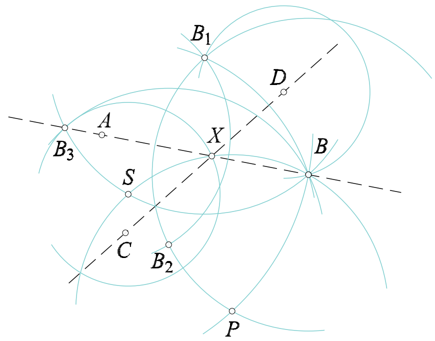


Sl. 7.

■

5) Konstrukcija sjecišta dva zadana pravca (p_{AB} i p_{CD})

Konstrukcija:



Sl. 8.

1) Odredimo točku B_1 simetričnu točki B u odnosu na pravac p_{CD} (kao presjek $k(C, |CB|)$ i $k(D, |DB|)$). Tada je $|DB_1| = |DB|$ i $|CB_1| = |CB|$.
2) Odredimo točku B_2 simetričnu točki B_1 u odnosu na pravac p_{AB} (kao presjek $k(A, |AB_1|)$ i $k(B, |BB_1|)$). Tada je $|AB_2| = |AB_1|$ i $|BB_2| = |BB_1|$.
3) Odredimo točku B_3 simetričnu točki B u odnosu na pravac $p_{B_1B_2}$ (kao presjek $k(B_1, |BB_1|)$ i $k(B_2, |BB_2|)$). Tada je $|B_1B_3| = |BB_1|$ i $|B_2B_3| = |BB_2|$.

4) Presijecimo $k(B, |BB_1|)$ i $k(B_3, |BB_3|)$ u točki P. Tada je $|B_3B| = |B_3P|$ i $|BP| = |BB_1|$.

5) Presijecimo $k(B_1, |BB_1|)$ i $k(P, |BP|)$ u točki S. Tada je $|B_1S| = |BB_1|$ i $|PS| = |PB|$.

6) Presijecimo $k(P, |BP|)$ i $k(S, |SB_3|)$ u traženoj točki X. Tada je $|PB| = |PX|$ i $|SB_3| = |SX|$.

Dokaz. Ako dokažemo da se točka X nalazi i na pravcu p_{AB} i na pravcu p_{CD}, zaključujemo da je ona sjecište ta dva pravca.

Uočimo jednakosti:

(i) $|B_1S| \overset{5}{=} |B_1B| \overset{4}{=} |BP| \overset{5}{=} |PS|$, tj. $|B_1S| = |PS|$;

(ii) $|SX| \overset{6}{=} |SB_3|$;

(iii) $\overset{\frown}{SX} = \overset{\frown}{SB_3}$ (to su lukovi nad tetivama iste duljine u kružnicama istih polumjera);

(iv) $\sphericalangle SBX = \dfrac{1}{2} \sphericalangle SPX$ (obodni kut kružnice $k(P, |PS|)$),

$\sphericalangle SBB_3 = \dfrac{1}{2} \sphericalangle SB_1B_3$ (obodni kut kružnice $k(B_1, |SB_1|)$),

$\sphericalangle SBX = \sphericalangle SBB_3$ (središnji kutovi su jednaki pa su i obodni kutovi jednaki);

(v) odavde slijedi da točka X leži na pravcu koji prolazi točkama B i B_3.

Ako dokažemo da je i točka A na tom pravcu, slijedi da je točka X točka p_{AB}.

(vi) Pravac p_{AB} je simetrala dužine $\overline{B_1B_2}$, a kako vrijedi

(vii) $|B_3B_2| \overset{3}{=} |BB_2| \overset{2}{=} |BB_1| \overset{3}{=} |B_3B_1|$ (točka B_3 jednako je udaljena od točaka B_1 i B_2), slijedi da se B_3 nalazi na p_{AB}.

(viii) Dakle, dokazali smo da točka X leži na pravcu p_{AB}.

Tvrdimo da točka X leži i na pravcu p_{CD} (tada je ona traženo sjecište).

(ix) Trokuti B_3BP i XBP su slični. (To su jednakokračni trokuti $|BB_3| \overset{4}{=} |PB_3|$, $|PX| \overset{6}{=} |PB|$ sa zajedničkim kutom $\sphericalangle XBP$.) Tada vrijedi:

(x) $\dfrac{|BB_3|}{|BP|} = \dfrac{|BP|}{|BX|}$, tj. $\dfrac{|BB_3|}{|BB_1|} \overset{4}{=} \dfrac{|BB_1|}{|BX|}$.

(xi) Uz dobiveni omjer i jednakost $\sphericalangle B_3BB_1 = \sphericalangle XBB_1$ slijedi da su trokuti B_3BB_1 i BB_1X slični.

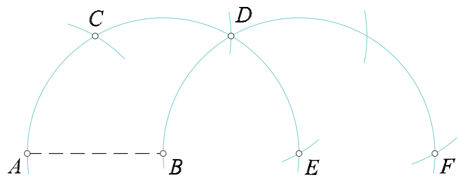
(xii) Kako je trokut B_3BB_1 jednakokračan, $(|B_1B_3| \overset{3}{=} |BB_1|)$, vrijedi da je i trokut BB_1X jednakokračan, tj. $|BX| = |B_1X|$.

(xiii) Tada se točka X nalazi na simetrali dužine $\overline{BB_1}$, a to je pravac p_{CD}. ■

Time smo dokazali da se sve konstrukcije izvedive ravnalom i šestarom mogu izvesti samo šestarom. Ali izazov geometrije šestara nije samo u mogućnosti konstrukcije. Današnji entuzijasti pokušavaju dobiti rješenje problema u što manjem broju koraka, tj. crtanjem što manjeg broja kružnica.

Primjer 4. Zadana je dužina $\overline{AB}$ duljine a. Konstruirajmo dužinu duljine $n \cdot a$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$.

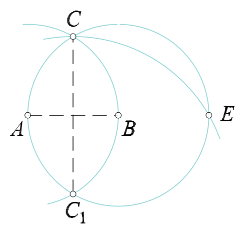
Konstrukcija:



Sl. 9.

Opišemo kružnicu $k(B, a)$ i istim polumjerom iz točke A presiječemo k u točki C, iz točke C presiječemo k u točki D i iz točke D presiječemo k u točki E. Tada je točka E dijametralno suprotna točka točki A, tj. $|AE| = 2a$. Na isti način se konstruira dijametralno suprotna točka F točki B kružnice $k(E, |AB|)$. Tada je $|AF| = 3a$. Postupak se može nastaviti n puta.

Napomena. Uočimo da se može smanjiti broj koraka konstrukcije (sl. 10):



Sl. 10.

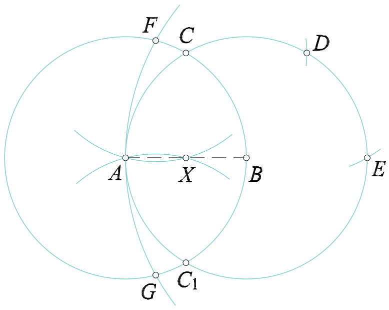
Do točke E ne moramo doći pomoću točke D, već upotrijebimo činjenicu da je $|CC_1| = |C_1E|$. ■

Zadatak 3. Zadane su tri dužine duljina a, b i c. Konstruirajte dužinu duljine x tako da vrijedi $a : b = c : x$, tj. konstruirajte četvrtu geometrijsku proporcionalu x.

Zadatak 4. Pomoću zadatka 3 riješite petu osnovnu konstrukciju.

Primjer 5. Konstruirajmo polovište zadane dužine $\overline{AB}$.

Konstrukcija:



Sl. 11.

Odredimo sjecišta kružnica $k(A, |AB|)$ i $k(B, |AB|)$: točke C i C_1. Zatim odredimo dijametralno suprotnu točku E točki A kružnice $k(B, |AB|)$. Točke A, B i E su kolinearne i $|AE| = 2|AB|$.

Zatim odredimo točke F i G kao presjek kružnica $k(E, |AE|)$ i $k(A, |AB|)$ i na kraju presiječemo $k(F, |AB|)$ s kružnicom $k(G, |AB|)$ i dobivamo traženo polovište X.

Dokaz. Trokuti AFX i AEF su slični (jednakokračni su i imaju zajednički kut uz bazu $\sphericalangle FAX$). Tada je

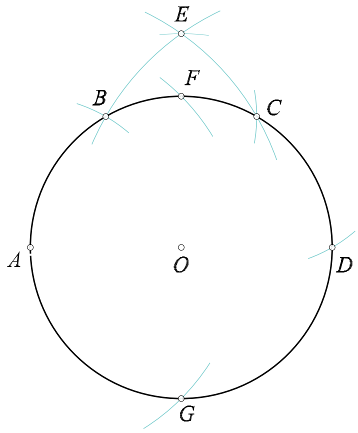
$$|AF| : |AE| = |AX| : |AF|$$
$$|AB| : 2|AB| = |AX| : |AB|$$
$$|AX| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$$

i odavde slijedi da je X polovište dužine $\overline{AB}$. ■

Zadatak 5. Primjer 5 se može generalizirati. Podijelite zadanu dužinu na n jednakih dijelova ($n = 3, 4, \ldots$).

Primjer 6. **Napoleonov problem.** Zadana je kružnica $k(O, r)$. Podijelimo tu kružnicu na četiri jednaka dijela, tj. odredimo vrhove u nju upisanog kvadrata.

Konstrukcija:



Sl. 12.

Odaberemo prvi vrh kvadrata A. Konstruiramo dijametralno suprotnu točku D točki A (pomoću točaka B i C). Odredimo točku E kao točku presjeka $k(A, |AC|)$ i $k(D, |AC|)$. Odredimo sjecišta F i G kružnica $k(O, r)$ i $k(A, |OE|)$. Točke A, G, D i F su vrhovi upisanog kvadrata. ■

Napomena. Dokažite ovu konstrukciju (dobivenu pomoću šest pomoćnih koraka) i pokušajte je pojednostavniti.

Zadatak 6. Ako su dana dva a) susjedna vrha, b) suprotna vrha kvadrata, konstruirajte preostala dva vrha.

* * *

Za geometriju šestara, osim Mascheronija, važan je i danski matematičar **Georg Mohr** (1640. – 1697.). On je 1672. (i to 125 godina prije Mascheronija) u Amsterdamu objavio knjigu “Euclides Danicus” (na danskom i nizozemskom jeziku) u kojoj se nalaze svi rezultati geometrije šestara. Ta knjiga nije izazvala previše interesa i uskoro pada u zaborav. Ponovno je otkrivena tek 1928. godine u antikvarijatu u Kopenhagenu. Kako su Mohr i Mascheroni nezavisno jedan od drugog riješili problem konstrukcija samo šestarom, te konstrukcije danas zovemo **Mohr–Mascheronijevim konstrukcijama**.

Literatura

[1] Palman, Dominik: *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.

[2] Gardner, Martin: *Mathematical Circus*, Penguin books, London, 1990.

[3] Honsberger, Ross: *Ingenuity in Mathematics*, MAA, New Math Library, 1970.

[4] Kostovski, A.: *Geometrical Constructions with Compasses Only*, Mir Publishers, Moscow, 1986.

[5] Veljan, Darko: *Napoleonov teorem i posljedice*, MFL 4, 1994/ 95, str. 169–173.

[6] Hanjš, Željko: *Konstrukcije samo šestarom*, MFL 1, 1995/ 96, str. 10–17.

[7] Hlavaty, Julius H.: *Mascherony Constructions*, Mathematics Teacher, November 1957, str. 482–487.

[8] Smith, David Eugene: *History of Mathematics*, Dover Publications, NY, 1958.

[9] Ball, W. W. R.: *Mathematical Recreations and Essays*, Macmillan and Company, London, 1959.

[10] Cheney, Fitch: *Can we Out do Mascheroni?*, Mathematics Teacher, March 1953, str. 152–156.

[11] Altshiller Court, Nathan: *Mascherony Constructions*, Mathematics Teacher, May 1958, str. 370–372.

Karikatura iz Galerije za humor FELIX FUN FACTORY ZAGREB, Harambašićeva 10.