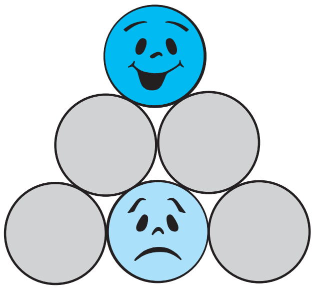
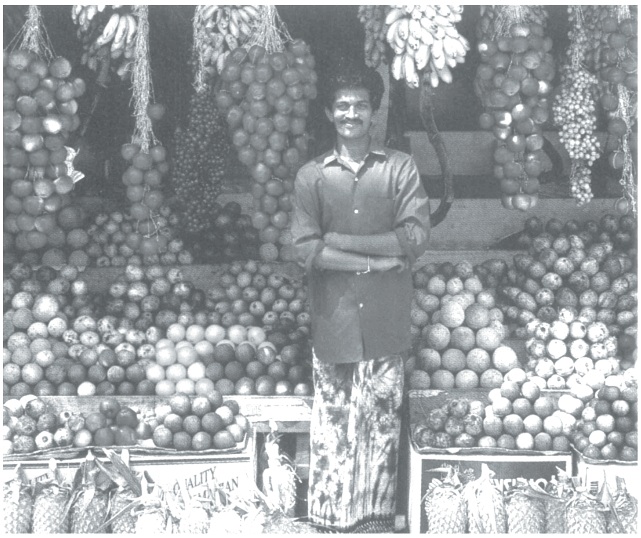


Problem pakiranja sfera

Ela Rac-Marinić-Kragić, Zagreb

Napokon je riješen problem star četiri stoljeća koji je postavio davne 1611. godine poznati njemački astronom (i matematičar) Johann Kepler. Problem je nazvan problemom pakiranja sfera i traži najučinkovitiji način smještanja (što većeg broja) sfera u prostrani sanduk. Naravno da su se tim problemom već davno bavili trgovci voćem prilikom pakiranja naranči na svojim pultovima. Ipak, radoznali matematičari nisu bili sigurni ne postoji li možda efikasnije pakiranje od poznatoga. Tako je rođen poznati problem koji doduše nije dostigao popularnost *Fermatovog Velikog (Zadnjeg) teorema*, a ni sam tijek rješavanja nije bio tako dramatičan. Ipak oba su problema stoljećima mučila matematičare i tek su odnedavna doživjela potpune dokaze o ispravnosti rješenja.

Krivac je dakle za višestoljetne matematičarske glavobolje bio Kepler. Da nije toliko napredovala kompjuterizacija još bismo uvi-



jek dvojili da li trgovci ispravno slažu svoje voće ili mogu uštedjeti nešto prostora ako ga drugačije preslože. Kepler je 1611. napisao članak "O šesterokutnoj snježnoj pahuljici" gdje objašnjava jedinstvenu šesterokutnu strukturu snježnih pahuljica. U tom članku postavljeni su temelji kristalografiji. Važnost načina slaganja dijelova materije Keplera je ponukala na drugo značajno pitanje tj. koji je najučinkovitiji način da se jednaki oblici materije smjeste u prostoru tako da zauzmu najmanji mogući volumen. Ako se radi o sferama, jasno je da će među njima uvijek biti praznina pa ma kako ih mi slagali u prostoru. Treba naći onaj način pakiranja koji će *minimizirati* te praznine.

Oblik i veličina prostora koji ispunjavamo sferama bitno utječe na rješavanje postavljenog problema. Da bismo problem postavili matematički precizno (*idealizirano*), promatramo što veće (beskonačno velike) sanduke.

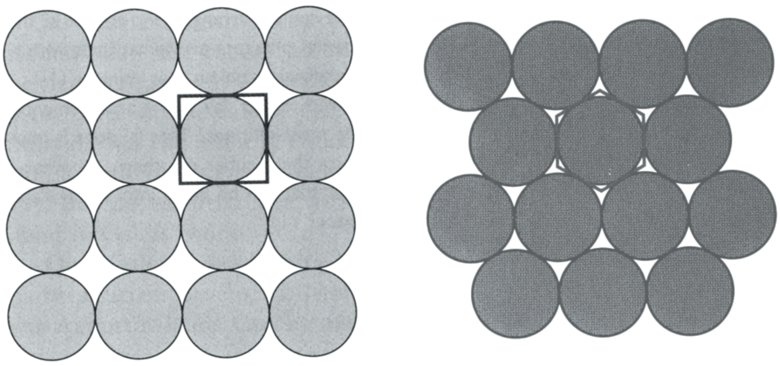
Pakiranje krugova

Kako bismo lakše shvatili taj problem, pozabavimo se sličnim ali lakšim problemom – dvodimenzionalnim analognim problemom pakiranja krugova na velikoj površini. Dva su najčešća načina pakiranja krugova koje vidimo na sl. 2.

Ova se dva načina pakiranja nazivaju još i pravokutno i šesterokutno pakiranje krugova. Veličina kojom mjerimo efikasnost pakiranja (dvodimenzionalnog odnosno trodimenzionalnog) je *gustoća* pakiranja koja je jednaka omjeru površine ili volumena pakiranih objekata i površine ili volumena područja u koje pakiramo objekte. Ako je područje cijela ravnina u dvodimenzionalnom pakiranju odnosno cijeli prostor u trodimenzionalnom pakiranju, račun nas vodi na neodređenu veličinu $\frac{\infty}{\infty}$. Newton i Leibniz dali su ključ za njeno izračunavanje – *metoda limesa*. Omjer se prvo izračunava za ograničena područja, pa se područje stalno povećava. Zatim se napravi limes niza ovih omjera kada granice područja teže u beskonačnost.

Kod pakiranja krugova možemo izračunavati gustoću ispunjavajući sve veće kvadrate (vidi sl. 2). Naravno da nije potrebno izračunavanje beskonačnog niza brojeva. Lakše je uzeti formulu za dani oblik pakiranja i tada naći limes. Kod pravokutnog pakiranja gustoća je $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$, a kod šesterokutnog $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.907$. Šesterokutno pakiranje ima veću gustoću pakiranja od pravokutnog. Pri kratkom promatranju to je očigledno i bez računa. No, da li je to i najučinkovitiji način? Najopćenitiji problem odnosi se na sve načine pakiranja bez obzira da li su oni pravilni ili nepravilni.

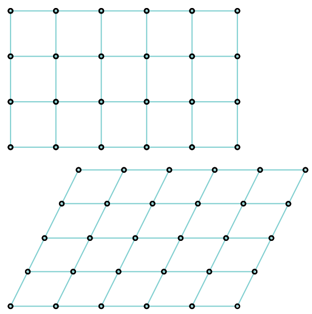
Njemački matematičar Carl Friedrich Gauss je tek 1831. godine dokazao da je šesterokutno pakiranje krugova najučinkovitije od svih takozvanih **rešetkastih** načina pakiranja. Rešetka u ravnini je skup svih točaka koje su smještene u čvorovima pravilne dvodimenzionalne mreže. Te mreže mogu biti



Sl. 2

pravokutne ili kosokutne kao na sl. 3. Središta krugova čine rešetku.

Ipak je ovaj dokaz ostavio otvoreno pitanje: a što s pakiranjima koja nisu pravilna? 1882. skandinavski matematičar Axel Thue obznanio je kako može dokazati da je šesterokutno pakiranje najučinkovitije od svih pakiranja krugova, ali tek je 1910. u potpunosti dokazao tu tvrdnju.



Sl. 3

Pakiranje sfera

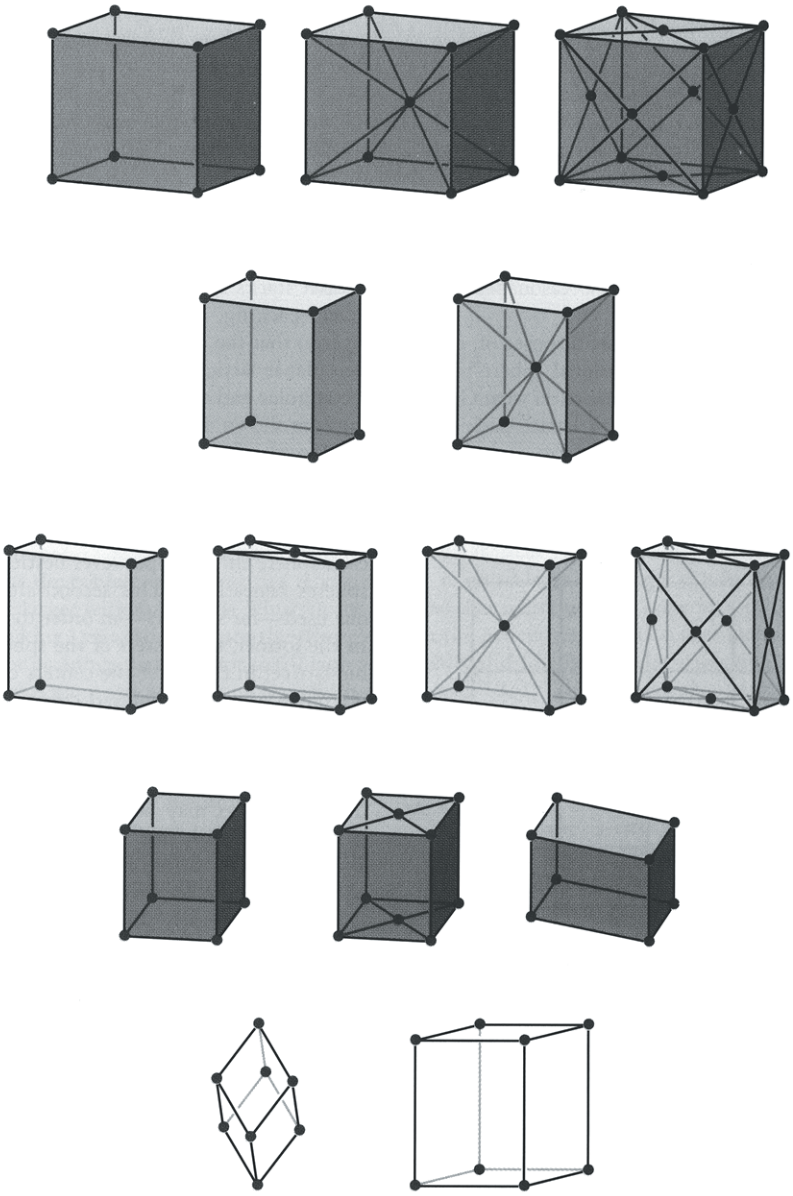
Pređimo na trodimenzionalni problem pakiranja sfera. Gauss se i ovdje koncentrirao na slučajeve **rešetkastih** pakiranja kod kojih središta sfera čine pravilnu trodimenzionalnu mrežu. Postoji točno 14 tipova pravilne trodimenzionalne mreže. To je konačno pokazao francuski botaničar i fizičar Auguste Bravias burne 1848., potpomognut prijašnjim radovima mnogih matematičara, a tzv. "Braviasove rešetke" vidimo na slici 4.

Prirodan način pakiranja sfera je "rešetkasti", gdje središta sfera smještamo u vrhove rešetke, sloj po sloj, baš kao što to rade i trgovci s voćem. Pri tome jedan sloj predstavlja jedan od dva načina dvodimenzionalnog pakiranja, šesterokutno ili pravokutno. Ako je oblik pakiranja pravokutni, tada opet možemo na dva načina pakirati slojeve – tako da su odgovarajuće sfere smještene vertikalno jedna iznad druge, odnosno da svaka sfera gornjeg sloja "upada" između četiri sfere donjeg sloja (druga metoda se koristi zbog stabilnosti). Slično, ako se slojevi slažu u šesterokutnoj formaciji, također su dva načina slaganja slojeva – ili vertikalno podešavanje sfera jedne iznad drugih ili "upadajuće" slaganje. Naizgled su to četiri načina pakiranja ali stvarno ih ima tri: "upadajuće" pravokutno i šesterokutno pakiranje su ekvivalentni. Ova tri načina rešetkastog pakiranja ispitao je i Kepler. Ta tri načina pakiranja danas se još zovu *kubična rešetka*, *sprijeda centrirana kubična rešetka* ili *oblik piramide* (za upadajuće slaganje) i *šesterokutna rešetka* (vidi sliku 5).

Kepler je smatrao da prirodne sile pokušavaju stvarati pravilne geometrijske strukture u razvoju raznih objekata kao što su na primjer snježne pahuljice, pčelinje saće ili plod šipka. Prirodan način da se postignu ove strukture, smatrao je Kepler, je da se započne s pakiranjem sfera i da svaka sfera ekspandira tako da potpuno zauzme međuprostor. Smatrajući da je priroda prihvatila optimalni način postizanja ciljeva, pravilni oblici pčelinjeg saća ili ploda šipka i šesterokutni oblik pahuljice mogli bi opisivati najučinkovitiji način pakiranja sfera, tj. sprijeda centrirana kubična rešetka bi bila najučinkovitija.

Kepler je ispitao tri gore spomenuta načina rešetkastog slaganja sfera i odredio njihove gustoće – za kubičnu je rešetku gustoća $\frac{\pi}{6}$ (≈ 0.5236), za šesterokutnu rešetku $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0.6046$ i $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.7404$ za oblik piramide, što znači da ova posljednja ima optimalno pakiranje između tri promatrana načina pakiranja. Ali, da li je to najučinkovitije pakiranje od svih rešetkastih pakiranja? Ili općenitije – da li je to najefikasnije pakiranje od svih vrsta pakiranja, pravilnih ili ne? Na prvo pitanje dao je odgovor Gauss dokazavši da je od svih rešetkastih pakiranja sprijeda centrirana kubična rešetka (tzv. pakiranje u *obliku piramide*) najučinkovitiji način pakiranja. Ali na drugo pitanje nije bilo odgovora sve donedavno. 1953. godine mađarski matematičar Laszlo Tóth uspio je taj problem razdijeliti na ogroman niz proračuna koji rješavaju specifične slučajeve. To je omogućilo upotrebu računala u rješavanju ovog problema.

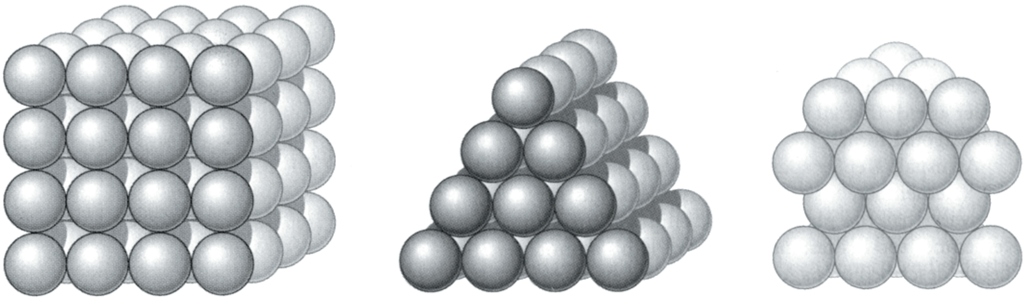
Ljeti 1990. veliko zanimanje je izazvalo publiciranje rezultata matematičara s Berkeley sveučilišta u Kaliforniji Wu-Yi Hsianga



Sl. 4

koji dokazuje Keplerovu pretpostavku da je pakiranje u obliku piramide najučinkovitije. Međutim članak podliježe proceduri ispitivanja dokaza baš kao i Wilesov dokaz *Velikog Fermatovog teorema* (vidi prošli broj MŠ-a) i odbacuje se kao nepotpun zbog niza propusta.

Nakon šestogodišnjeg truda matematičar Thomas Hales s Michiganskog sveučilišta uz pomoć svog studenta Samuela Fergusona uspio je 1994. riješiti ovaj problem dokazavši da je oblik piramide najučinkovitiji. Dokaz je obznanio 1998. i možete ga naći na internetu na adresi http://www.math.lsa.umich.edu/ hales/ .



Sl. 5

Ali oprez – on sadrži 250 stranica teksta i oko 3 gigabajta kompjuterskih programa i podataka. Svatko tko želi pregledati rezultate mora uz tekst pokrenuti i program. Hales ipak dozvoljava zbog kompliciranosti i dužine dokaza kako mora proći neko vrijeme dok se dokaže njegova potpuna korektnost i poziva sve koji se bave matematikom da pokušaju naći pogreške. Stručnjaci koji su pregledali dokaz smatraju ga uvjerljivim.

Literatura

[1] SIMON SINGH, *Fermat's last theorem*, Fourth estate, London.

[2] KEITH DEVLIN, *Mathematics: The Science of Pattern*, Scientific American Library, New York.

[3] http:/ www.maa.org/ devlin/ devlin_9_98 .html

KAKO RAZREZATI...

. . . komad papira u obliku pravokutnika 8 cm duljine i 3 cm širine na dva dijela od kojih se može složiti model kocke?