

Veliki Fermatov teorem

Siniša Slijepčević, Zagreb



Najpoznatiji matematički problem, veliki Fermatov teorem, problem koji je mučio najveće umove u povijesti, te neke otjerao u ludilo ili samoubojstvo, napokon je riješen, sada i službeno. Wolfskehlova nagrada za točno rješenje tog problema, 50 000 dolara koji su desetljećima čekali rješavača, nedavno je napokon dodijeljena Andrewu Wilesu, tihom Englezu iz Princetona. No, pitanje je, zašto je dodijeljena tek sada, gotovo pet godina nakon što je Wiles prvi put objavio rješenje?

23. lipnja 1993., u Newton institutu u Cambridgeu održano je najvažnije matematičko predavanje ovog stoljeća. Andrew Wiles, držeći slušatelje u napetosti do samog kraja, u fantastičnom je predavanju zaista dokazao Fermatovu hipotezu. Pljesak je trajao dugo, dugo, u svečarskoj atmosferi zalivenoj

šampanjcem i zaslijepljenoj bljeskalicama i nitko nije ni slutio da to nije kraj priče, već početak prave noćne more.

Sam Pierre Fermat, autor zagonetke, bio je čovjek posebnog smisla za humor. U Francuskoj 17. stoljeća od sudaca se očekivao uglavnom samotani život, jer se vjerovalo da bi socijalni kontakti ugrožavali njihovu mogućnost objektivne prosudbe, tako da je Fermat, i sam sudac, većinu svog slobodnog vremena provodio igrajući se brojevima. Glavni mu je udžbenik bila kopija Diofantove "Aritmetike", enciklopedije tadašnjeg znanja o teoriji brojeva, i mnogi Fermatovi rezultati, zapisani jedino na neuobičajeno širokim marginama te knjige, započeli su renesansu te grane matematike. No, Fermat je bio poslovično neprecizan i površan, te je gotovo stoljeće kasnije Leonhard Euler uspio rekonstruirati sve njegove dokaze i ideje. Sve, osim jedne napomene, koja će postati poznata kao veliki Fermatov teorem:

Na margini, na strani 62, knjiga II, pisalo je da ne postoje prirodni brojevi x , y , z i broj n veći od 2 koji zadovoljavaju jednadžbu:

$$x^n + y^n = z^n$$

i nestašan dodatak koji će proganjati generacije matematičara: “Imam zaista sjajan dokaz ove tvrdnje, ali je margina za njega preuska.



Sl. 1. Pierre Fermat

Teško da je ikada postojao sličan tako jednostavan problem, shvatljiv osmoškolcu, a ipak gotovo nerješiv. Što je ustvari rješenje ili dokaz? Matematičari priznaju jedino rješenja koja, polazeći od očitih činjenica aksioma, nizom preciznih logičkih koraka dolaze do zaključka. Nedostatak je što i najmanja greška ili nepreciznost čini dokaz bezvrijednim, a prednost u tome što točan dokaz ostaje zauvijek zapamćen i često nosi ime svog autora; stoljećima, a ponekad i tisućljećima.

No, dokaza Fermatove tvrdnje na margini nije bilo. Problem je čekao netaknut gotovo čitavo stoljeće dok ga nije dohvatio Leonhard Euler, švicarski lukavac. Euler je većinu karijere proveo u Petrogradu kao poseban štićenik Katarine Velike — sasvim udobna pozicija, a naklonost je carice zaradivao na razne načine. Jednom je pred caricom i dvorjanima sudjelovao u raspravi o postojanju Boga, nadmudrujući se s velikim francuskim filozofom Diderotom. Euler je malo razmislio, ustao i izjavio:

“Gospodine, $(a + b^n)/n = x$, stoga Bog postoji; odgovorite!”

Euler je umjesto formule mogao reći i “štrukle sa sirom” ili bilo koji drugi pojam koji izvučen iz konteksta gubi svaki smisao, no Diderotu algebra nije bila jača strana, te se, ne shvaćajući ni slovca, povukao i brzo posramljen “zbrisao” nazad u Pariz. Euleru je, izuzevši tu zgodu, slava rasla i zbog hrpe sjajnih matematičkih rezultata, te zbog toga što je uspio dokazati Fermatovu tvrdnju u slučajevima $n = 3$ i $n = 4$. No, preostajalo je još uvijek beskonačno mnogo vrijednosti n za koje Euler nije znao odgovor, odgovor koji je bio još dva i pol stoljeća daleko.

Jedna žena je bila najbliže

Pedeset godina kasnije, doprinos jedne žene, Sophie Germaine, bio je veći nego svih muškaraca prije nje zajedno. Sophie Germaine je, slijedeći svoju glad za matematikom, morala savladavati ne samo tešku literaturu, već i sve predrasude tog vremena prema ženama. Karl Friedrich Gauss, najveći tadašnji matematički autoritet, bio je vrlo iznenađen dobivši pismo potpisano samo s “Monsieur Blanc”, u kojem je stajao dokaz da je Fermatova tvrdnja točna u mnogo slučajeva, preciznije, za sve proste brojeve (djeljivi samo s 1 i sa samim sobom) i takve da je $2n + 1$ prost (na primjer $n = 5$, ili $n = 11$). Gauss je tek mnogo kasnije saznao da je pravi autor pisma Sophie Germaine zahvaljujući — Napoleonu. Kada je Napoleonova armija 1806. koračala Pruskom, pismo Sophie Germaine francuskom generalu Pernetyju, u kojem molila za Gaussovu sigurnost, spasilo je Gaussov život. No, Gauss je, unatoč doprinosu Sophie Germaine, Fermatov teorem smatrao — nerješivim.

Unatoč Gaussu, u prvoj polovini devetnaestog stoljeća Pariz je bio matematički centar svijeta. Evariste Galois, nadareni dvade-

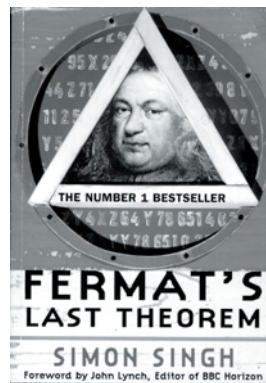
setogodišnji Parižanin, zbog svojih je republikanskih uvjerenja u monarhističkoj Francuskoj tog doba često upadao u nevolje. Njegova je najveća nevolja bila ljupka Mademoiselle Stephanie-Felicie du Motel, a još veća njen zaručnik Monsieur d'Herbinville. Saznavši za Galoisa, d'Herbinville ga je bez oklijevanja izazvao na dvoboj. Galoisov rukopis ispisan posljednje noći pred duel — očajnički pokušaj da zapiše još neobjavljenu teoriju još uvijek je sačuvan, ispunjen krikovima “Je n'ai pas le temps, je n'ai pas le temps” (nemam vremena, nemam vremena) između redova formula, te riječima “une femme” (jedna žena), žustro precrtanima.

U zoru 30. svibnja 1832. ispucana su dva hica; d'Herbinville je odšetao neozlijeđen ni ne osvrnuvši se, a smrtno ranjeni Galois je ostao ležati, sam. Galoisov rukopis bit će objavljen tek dvadesetak godina kasnije, no tada odmah biva proslavljen kao odgovor na poznati problem: zbog čega je nemoguće riješiti jednadžbu petog stupnja; a u novijim vremenima Galoisova teorija koristi se čak i u analitičkoj mehanici, tj. proračunima gibanja planeta i satelita. No najveću posvetu Galoisovom geniju ispisat će, tek godinama poslije, Andrew Wiles, rabeći njegovu teoriju kao glavno oruđe u dokazu Fermatova teorema.

No, grozničava potraga za rješenjem



Sl. 2. Evariste Galois



Sl. 3. Naslovnica knjige Simona Singha koja je tjednima u Velikoj Britaniji bila bestseller

Fermatova problema se nastavlja. Dva stoljeća poslije, na isti dan, 1. ožujka 1847., Gabriel Lamé i Augustin Cauchy su na sjednici Francuske akademije objavili da imaju dokaz. Lamé i Cauchy, čuveni matematičari tog vremena, bili su veliki suparnici, i već su padale oklade koji će od njih dvojice prvi objaviti dokaz. No, najbrži je bio Ernst Kummer, koji je u svom radu, ne samo pronašao grešku obojici, nego i objasnio zbog čega je za dokaz tadašnje znanje matematike bilo nedovoljno. No, Laméov je rad ipak dokazao tvrdnju u slučaju $n = 7$, a Kummerov za sve “neregularne” proste brojeve, uključujući sve brojeve veće od 37.

Nakon poraza što su ih doživjeli Lamé i Cauchy, svi su pokušaji zamrli, sve dok ih pola stoljeća kasnije nije ponovo probudio njemački industrijalac Wolfskehl. Paul Wolfskehl se, sasvim nesretno zaljubljen u ženu čiji je identitet danas nepoznat, bio odlučio na rješenje u skladu s tradicijom njemačkog romantizma. Bio je odredio dan i trenutak – ponoć, pedantno na vrijeme završio sve preostale poslove, zalijepio oproštajno pismo, te sjeo i čekao. Wolfskehl, matematičar iz hobija, za svoje je posljednje trenutke odabrao upravo Kummerov čuveni rad, te je, nekoliko minuta prije ponoći, već duhom skoro napustivši ovaj svijet, uočio nešto zanimljivo. Kummerov rad je zaista sadržavao grešku, te ju je Wolfskehl, zaboravivši i ženu i napunje-

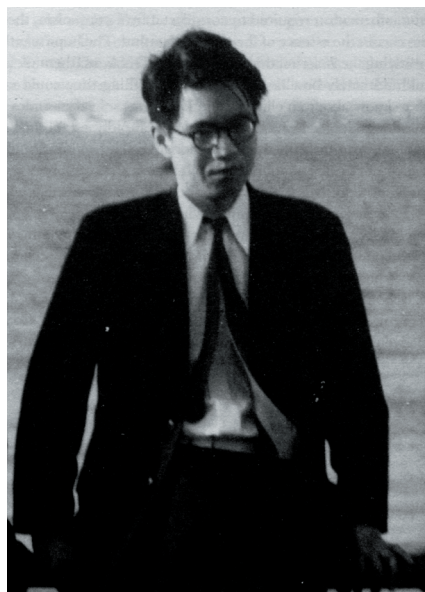
ni pištolj, radeći do jutra ispravio. Rješenje Fermatova teorema nije bilo ništa bliže, ali je Paul Wolfskehl umro tek 1908. prirodnom smrću, ostavivši većinu svog bogatstva zadužbini za točan dokaz. Nagrada za rješenje je bila pravo bogatstvo, te su stizale stotine rješenja koje su članove Wolfskehlove komisije dovodila do očaja. Jedan od kasnijih članova komisije dr. F. Schlichting, svjedoči kako je većina bila kompletna besmislica: jedan je poslao polovicu rješenja tražeći 1000 DM unaprijed za drugu polovicu; a neka su odmah proslijeđena psihijatrima koji su dijagnosticirali tešku shizofreniju. No, nijedno nije sadržavalo točan dokaz.

Uzaludna potraga

Mnogi su tako bezuspješno pokušavali pronaći dokaz, a čak je i veliki njemački logičar Gödel imao svoje mišljenje o Fermatovu teoremu. Gödel je 1931., kao dvadesetpetogodišnjak objavio "O formalno neodlučivim tvrdnjama", revolucionarno djelo koje danas citiraju ne samo matematičari, već i filozofi i poneki neurobiolozi. Gödel je dokazao da su i u matematici paradoksi neizbježni, i još gore, da postoje matematičke tvrdnje, koje premda istinite, nikad nećemo biti u stanju dokazati. Kasnije je Gödel mislio kako je Fermatov teorem upravo takva tvrdnja. Unatoč trudu tolikog broja velikih umova, dokaz Fermatova teorema nikada nije bio udaljeniji.

Sljedeće uloge u velikoj potrazi odigrala su dvojica Japanaca. Yutaka Taniyama, tada nadareni dvadesetsedmogodišnjak, 1955. je prvi put uočio nešto što će revolucionirati teoriju brojeva. Taniyamine su ideje tada bile čista fantastika. Taniyama je predlagao da su dva tada potpuno odvojena područja matematike, eliptičke krivulje i modularne forme, ustvari jedno te isto. Nitko ga nije

shvaćao ozbiljno, eliptičke krivulje i modularne forme su toliko različite matematičke ideje, da je to čak i za matematičare bilo pre-radikalno. Tri godine kasnije Taniyama je počinio samoubojstvo. Tek je njegov prijatelj Goro Shimura vjerovao u to što se danas zove Shimura-Taniyamin teorem. Čuvajući oproštajno pismo svog prijatelja, Shimura je s vremenom skupljao argumente, i hipoteza je stjecala sve više poklonika.



Sl. 4. Yutaka Taniyama

Situacija je još dramatičnija 1986. kad je Amerikanac Ken Ribet dokazao ukoliko je Shimura-Taniyamina hipoteza točna, onda je točan i Fermatov teorem. No problem je bio dokazati Shimura-Taniyaminu hipotezu — nitko nije imao pojma kako.

Vremeplov se napokon zaustavlja na Andrewu Wilesu. Cambridge, grad Wilesova najvećeg uspjeha je i grad njegova djetinjstva. Ako se od Newtonovog instituta spustite do rijeke Cama (po kojoj svako malo protetura pokoji osmerac, veslima umalo obezglavljujući sirote labudove), malo poviše je mala biblioteka na Milton Roadu u kojoj je čupavi desetogodišnjak Wiles prvi put pročitao o Fermatovu teoremu. "Imao sam

sreću da slijedim svoj dječjački san u svom odraslom životu” reći će Wiles o Fermatovu teoremu. Zaista, do kraja studija Wiles je detaljno znao sva dotadašnja dostignuća matematičara o Fermatovu teoremu, i sve njihove greške. No, put profesionalnog matematičara vodio ga je dalje, doktorirao je radom o eliptičkim krivuljama. Kada je Wiles, tada u Princetonu, čuo za Ribetov rezultat, odluka je bila neizbježna — pokušat će dokazati Shimura-Taniyaminu hipotezu. Bila je to vrlo nadobudna i hrabra odluka, pa je odlučio raditi u potpunoj tajnosti i izolaciji.



Sl. 5. Andrew Wiles

Wiles je nastavio s redovnim predavanjima i aktivnostima, no svaki se slobodni trenutak povlačio na svoj tavan i radio. Strategija Wilesova dokaza bila je uobičajen matematički trik kad je riječ o beskonačnim skupovima — matematička indukcija, i nakon godinu dana, koristeći upravo Galoisovu teoriju, bio je gotov prvi korak. No sljedeći je korak bio teži, i četiri su godine bile sasvim besplodne. 1992. Wiles je naučio novi trik, Kolyvagin-Flachovu metodu, i polako je za sve više vrsta eliptičkih krivulja dokazivao da su modularne forme. Jednog svibanjskog dana 1993. Wiles je, nakon sedam godina rada, napokon znao cijeli dokaz.

Predavanje u Cambridgeu

U lipnju se u Newtonovu institutu u Cambridgeu održavala konferencija o eliptičkim krivuljama, i Wiles je odlučio da je sedam godina tajnosti bilo dovoljno. Naslov Wilesova predavanja bio je sasvim općenit. “O eliptičkim krivuljama, modularnim formama i Galoisovoj reprezentaciji”, što je moglo značiti bilo što; no glasine su se širile. Wilesov bivši mentor, John Coates pitao ga je: “Andrew, što si dokazao? Hoćemo li zvati novine?” Wiles je samo odmahnuo glavom. Wiles je uspio održati napetost do samog kraja predavanja, koje je doživjelo potpuni uspjeh. Sljedećih su se dana Wilesove slike pojavile na mnogim naslovnim stranicama, te je on munjevito postao najpoznatiji, ustvari jedini poznati matematičar današnjice. Mjesecima kasnije Internetom su se širile glasine druge vrste. Potpuni tekst Wilesova dokaza nije bio dostupan, i zlobnici su tvrdili da će proći novih 350 godina dok netko ne dokaže Wilesove tvrdnje.

No, šestorica matematičara pregledavala su dvije stotine stranica Wilesova rukopisa, red po red, što je inače uobičajena akademska procedura prije objavljivanja rada. Jedan od njih, Nick Katz, krajem je kolovoza uočio jedan sitan problem u trećem poglavlju. Wiles je odmah odgovorio, no Katzu jos uvijek nije bilo jasno. Problem ipak nije bio sitan, i u prosincu je Wiles napokon javno priznao da greška postoji. Greška je izgleda bila fatalna, a Fermatov je teorem i dalje bio nedokazan.

Wiles je bio očajan, te je mjesecima grozničavo na svom tavanu pokušavao ispraviti svoj dokaz. Tada se, početkom travnja 1994., poruka proširila Internetom. U poruci je stajalo da je Noam Elkies, profesor s Harwarda, pronašao brojeve x , y , z i n koji su protuprimjer Fermatova teorema i za Shimura-Taniyaminu hipotezu! Elkiesu se

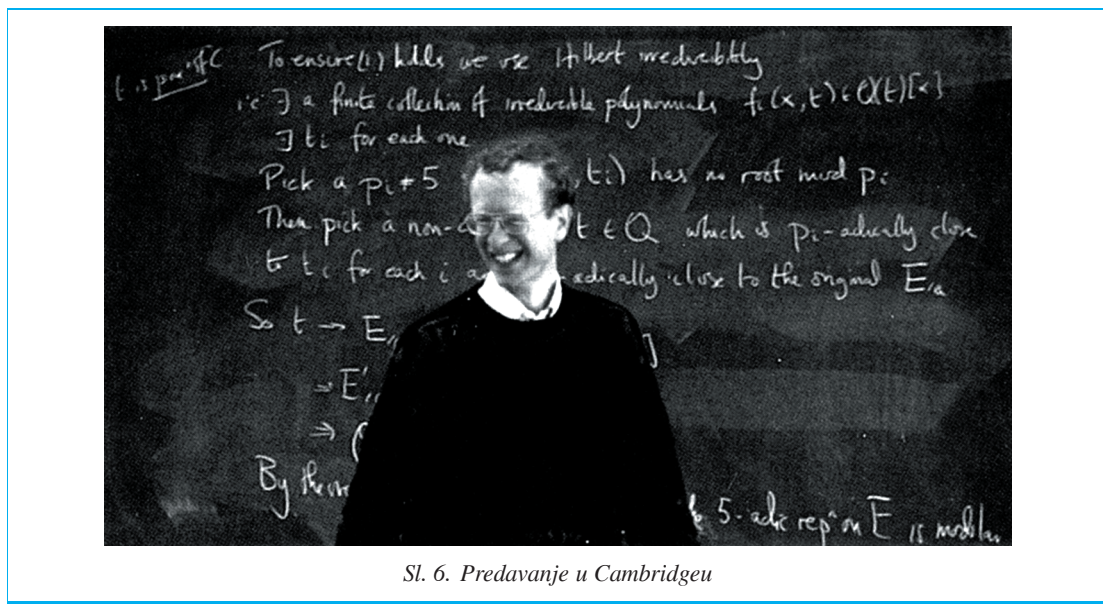
moglo vjerovati, jer je nekoliko godina prije pronašao protuprimjer za sličnu Eulerovu hipotezu. Dugogodišnji Wilesov trud je, izgledalo je, bio sasvim uzaludan. Dugo je trebalo dok Wiles napokon nije uočio datum poruke 1. travnja!

No, Wiles nije napredovao, i odlučio se potpuno predati, ukoliko do listopada ne pronađe rješenje. Wiles se još uvijek jasno sjeća: “Sjedio sam za svojim stolom jednog jutra, 19. rujna, istražujući Kolyvagin-Floč metodu. Nisam vjerovao da je mogu natjerati da radi, mislio sam da mogu barem objasniti zašto ne radi.” Tada je Wiles napokon shvatio korak koji je nedostajao. “Cijeli sam dan hodao po Odjelu, i vraćao se natrag da pogledam nalazi li se još uvijek na mom stolu. Bilo je tamo.”

Sjećanje je toliko snažno da se Wilesu dok priča oči pune suzama. Ovaj put je dokaz bio točan, te je napokon objavljen u najprestižnijem matematičkom časopisu “Annals of Mathematics”, u lipnju 1995. Teško da je ijedan dokaz u povijesti provjeravan kao Wilesov i Wolfskehllova nagrada je, propisa-

ne tri godine nakon objave dokaza, napokon dodijeljena Wilesu. Wilesov je dokaz, prema mnogima najveći matematički rezultat ovog stoljeća, ohrabrio matematičare da se uhvate u koštac s mnogim drugim velikim neriješenim matematičkim problemima. Ipak, teško da će išta uspjeti zamijeniti Fermatov teorem, no, dramatičnost Wilesove samotne borbe ostat će sasvim jedinstvena. Wilesove kasnije poteškoće bit će zaboravljene, a riječi kojima je završio predavanje u Newton institutu već su postale metafora matematičke pobjede. Toga lipanjskog dana u Cambridgeu, Andrew Wiles je ispisao zadnji red dokaza Shimura-Taniyamina teorema, te je u posljednjoj rečenici tonom “i nije tako bitno, ali usput”, spomenuo, da je time dokazan i Fermatov teorem.

Zatim se okrenuo, i skromnim smiješkom Edmunda Hillaryja na vrhu Everesta samo dodao: “Mislim da ću ovdje stati.”



Sl. 6. Predavanje u Cambridgeu