Slika pomaže

Metodika

Nikola Šukunda, *Zagreb*

U nekim zadacima analitičke geometrije ravnine rješavanje problema svodi se na rješavanje algebarskih jednadžbi i sustava jednadžbi. To pak mogu biti zadaci koje ponekad nije nimalo jednostavno riješiti. S druge strane ne mora biti riječi o tome da su sami postavljeni problemi teški. Barem ne, ako se radi o njihovom geometrijskom sadržaju. Dobro nacrtana slika može nam biti od velike pomoći i može biti ključ rješenja. Tu je mjesto gdje nam može vrlo učinkovito pomoći neki od jednostavnih računalnih programa, primjerice *GeoGebra* o kojoj se u *M***iš**-u dosada dosta pisalo. U tom su programu i izrađeni crteži uz ovaj članak.

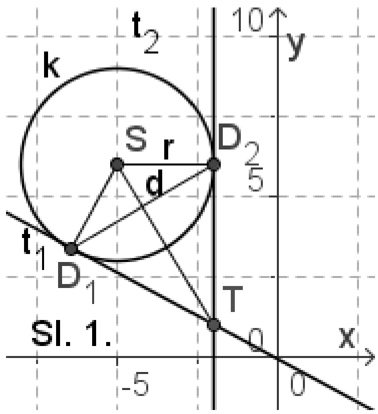
O čemu je riječ? Odgovor neće biti izravan, već ćemo ga dati kroz niz probranih primjera.

Zadatak 1. Iz točke $T(-2,1)$ povučene su tangente na kružnicu $(x+5)^2+(y-6)^2=9$. Kolika je udaljenost dirališta tih tangenata?

Zadatak možemo rješavati *analitički*. Odredimo tangente, potom dirališta pa po formuli za udaljenost točaka izračunamo njihovu udaljenost.

No u ovom bismo se zadatku susreli s dodatnim problemom. Kad iskoristimo podatke uvrštavajući ih u uvjet diranja pravca i kružnice, jednadžba što ćemo je dobiti bit će linearna. Tako imamo samo jednu tangentu, pravac $y=-\frac{8}{15}x-\frac{1}{15}$. Kako je to moguće, pitamo se? Ako postoji jedna tangenta, mora postojati još jedna. Točka T nije na kružnici.

Nacrtajmo sliku.



Sl. 1.

Slika otkriva tu drugu tangentu, pravac $x=-2$. Taj je pravac okomit na os x te za njega koeficijent smjera nije definiran. To je razlog zbog kojega ga nismo dobili računom.

No slika nam sugerira i jednostavnije, obično *planimetrijsko* rješenje. Središte kružnice je točka $S(-5,6)$, duljina polumjera jednaka je $r=3$.

Izračunajmo $|ST|=\sqrt{34}$ i $|TD_1|=5$.

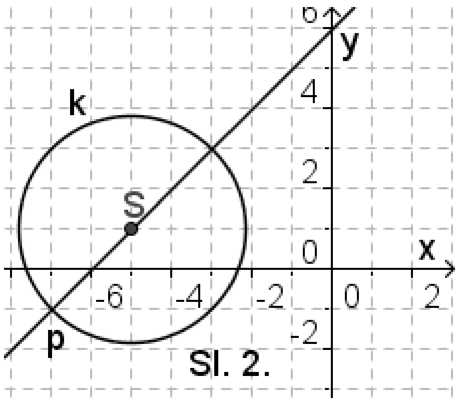
I sada izjednačavanjem izraza za površinu trokuta SD_1T dobivamo: $|ST|\cdot\frac{d}{2}=|SD_1|\cdot|TD_1|$, a odatle $d=\frac{15}{17}\sqrt{34}$.

Nakon ovog zadatka nastavimo s navođenjem niza primjera koji će ukazati na jedan nov i nestandardan način njihova rješavanja uz primjenu sasvim jednostavnog računalnog programa — *GeoGebre*.

Zadatak 2. Pokažite da su tangente povučene u sjecištima pravca $y = x + 6$ i kružnice $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 18 = 0$ paralelne.

Možemo dakako potražiti sjecišta pravca i kružnice, u sjecištima položiti tangente te ustvrditi kako imaju jednak koeficijent smjera. Pokazat ćemo da je taj posao zapravo nepotreban.

Iskoristimo *GeoGebru,* nacrtajmo sliku.



Sl. 2.

Što primjećujemo? Čini se da pravac prolazi središtem kružnice. Provjerimo to! Da, točno je. Središte je kružnice točka $S(-5, 1)$ i ono (jer je $1 = -5 + 6$) uistinu pripada pravcu $y = x + 6$.

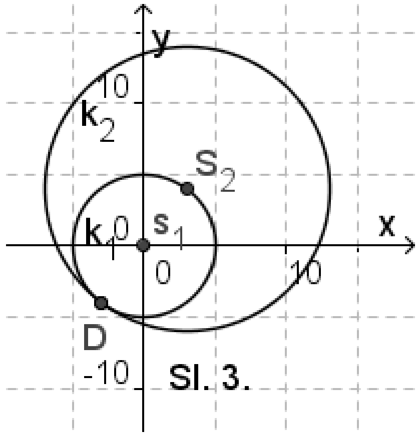
Tangente položene u sjecištima pravca koji prolazi središtem kružnice i kružnice na kružnicu paralelne su, što je jednostavna geometrijska činjenica.

Nastavimo istim putem:

Riješimo nekoliko zadataka u kojima se traži određivanje zajedničkih tangenata dviju danih kružnica. Problem općenito nije nimalo jednostavan, jer dvije kružnice mogu imati i četiri zajedničke tangente, dvije vanjske i dvije unutarnje, što pak znači kako možemo očekivati da će se pri analitičkom rješavanju zadataka pojaviti jednadžba čak četvrtoga stupnja. A takve jednadžbe ne samo što su ponekad teške za rješavanje, već su srednjoškolcima i nedostupne.

U svim sljedećim primjerima rješavanje je potpomognuto primjenom *GeoGebre*. Nakon postavljanja zadatka, crtež pomaže pri analizi situacije i nameće rješenje.

Zadatak 3. Odredite zajedničke tangente kružnica $x^2+y^2 = 25$ i $(x-3)^2+(y-4)^2 = 100$.



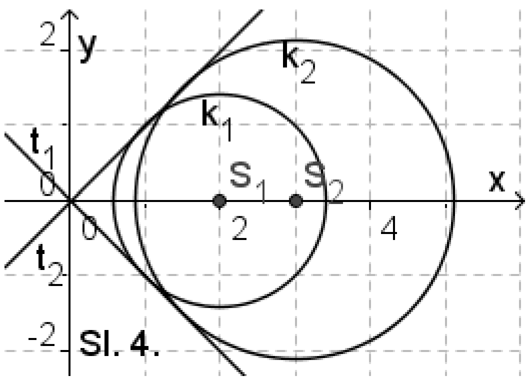
Sl. 3.

Slika nam pokazuje kako mala kružnica iznutra dira veliku. To je lako provjeriti i računski: $|S_1S_2| = 5 = |r_2 - r_1|$.

Ove dvije kružnice imaju točno jednu zajedničku tangentu s diralištem $D(-3, -4)$ i s koeficijentom smjera $k = -\frac{3}{4}$. Naime tangenta je okomita na pravac S_1S_2 a taj ima jednadžbu $y = \frac{4}{3}x$.

Konačno, jednadžba zajedničke tangente glasi: $3x + 4y + 25 = 0$.

Zadatak 4. Odredite jednadžbe zajedničkih tangenata kružnica $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$ i $2x^2 + 2y^2 - 12x + 9 = 0$.



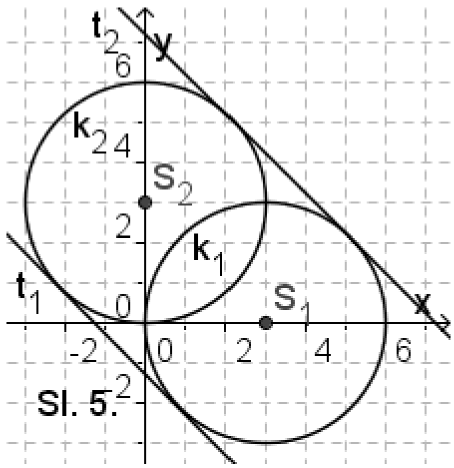
Sl. 4.

Metodika

Zapišimo jednadžbe kružnica u oblicima iz kojih se lako razaznaju njihova središta i njihovi polumjeri: $(x-2)^2+y^2=2$, $(x-3)^2+y^2=\frac{9}{2}$.

Uočavamo kako su središta ovih dviju kružnica na osi x. Jednostavnim planimetrijskim razmatranjem pokazuje se kako zajedničke tangente ovih dviju kružnica prolaze ishodištem, to su pravci $x+y=0$ i $x-y=0$.

Zadatak 5. Odredite zajedničke tangente kružnica $x^2+y^2-6x=0$ i $x^2+y^2-6y=0$.

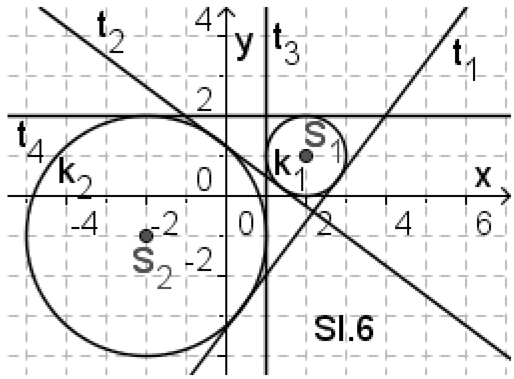


Sl. 5.

Ovdje je pak riječ o dvjema sukladnim kružnicama, jednoj ($(x-3)^2+y^2=9$) središte je na osi x, drugoj ($(x^2+(y-3)^2=9$) središte je na osi y. Tangente su očito dvije, to su dva paralelna pravca s koeficijentom smjera -1.

Odsječci tih pravaca se na koordinatnim osima mogu jednostavno planimetrijski odrediti. Jednadžbe tangenata su $y=x-3\pm3\sqrt{2}$.

Zadatak 6. Odredite jednadžbe zajedničkih tangenata kružnica $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ i $(x+2)^2+(y+1)^2=9$.



Sl.6

U ovom slučaju imamo četiri zajedničke tangente, jer se kružnice ne sijeku. No dvije odmah otkrivamo, to su $x-1=0$ i $y-2=0$. Ostale dvije također možemo lako naći sa slike, običnim geometrijskim razmatranjima. To su dva međusobno okomita pravca $4x-3y-10=0$ i $3x+4y-5=0$.

B.C.PRETPOTOPNJACI