

Funkcije u nastavi matematike

Ela Rac Marinić Kragić, Zagreb

1. Funkcije u školskoj matematici nekad i sad

Svojedobno su u osnovnoj školi učenici savladavali pojam funkcije intuitivno, bez strogih matematičkih definicija. Taj je način prihvaćanja pojma funkcije bio primjeren uzrastu i olakšavao je kasniji susret sa strogom matematičkom definicijom funkcije i njezinim zapisom. Nedostatak učenja osnova teorije skupova također je znatno otežao uvod u matematičku definiciju pojma funkcije.

Osnovni pojmovi i operacije sa skupovima u osnovnoj se školi ne uče već dugi niz godina, pa ih nema ni u najnovijem programu nastave matematike. Funkcije se uvode u 7. razredu, i to odmah preko strogog matematičkog aparata i zapisa linearne funkcije koji se odmah nakon toga povezuje s pravcem. Zato učenici pojam funkcije često i poistovjećuju s pojmom pravca. Zapitajte učenika prvog razreda srednje škole što je to funkcija i nerijetko ćete dobiti odgovor: "Pravac".

2. Prijedlog za prirodniji način uvođenja pojma funkcije

Pojam funkcije se ne bi trebao odmah uvoditi preko linearne funkcije niti preko strogog matematičkog zapisa, već kao odnos dviju zavisnih veličina. Učenicima viših razreda osnovne škole nije teško razumjeti odnos izme-

đu dviju veličina od kojih je jedna zavisna o drugoj. Lako je naći mnoštvo primjera koji su učeniku bliski i koji ukazuju na takav pojam funkcije.

Vozimo li se konstantnom brzinom, broj prijeđenih kilometara zavisi o duljini trajanja vožnje, tj. o vremenu; volumen kocke i površina kvadrata ovisni su o duljini brida odnosno stranice; ukupna cijena kupljene robe zavisi o količini kupljene robe; vrijeme za obavljanje nekog posla ovisi o broju radnika koji ga obavljaju. . .

To je intuitivni pristup značenju funkcije s kojeg se postupno prelazi na pojam pridruživanja. Dobro je da učenici sami uoče pravilo pridruživanja, napišu ga i izračunaju nekoliko zadanih vrijednosti.

No treba isto tako istaknuti da postoje i veličine koje se ne pridružuju po nekom unaprijed zadanom pravilu kao što je to u gore spomenutim primjerima.

Tako npr. — svakoj se europskoj državi može pridružiti njezin glavni grad, svakoj prisutnoj osobi u prostoriji može se pridružiti njezina visina ili broj godina, svakom učeniku iz razrednog odjeljenja može se pridružiti zaključna ocjena iz matematike itd. . .

Tu je nužno primijetiti da u svim primjerima postoje slučajevi kod kojih se različitim nezavisnim veličinama može pridružiti jedna te ista zavisna veličina. Tako npr. više različitih osoba može imati istu visinu ili broj godina, nekoliko učenika imaju istu zaključnu ocjenu iz matematike itd.

Trebalo bi ponukati i ohrabriti učenike da sami smisle nekoliko primjera funkcija koje se zadaju na oba spomenuta načina.

3. Tablično zadavanje funkcija

Funkcije se mogu zadavati i tablično.

Svugdje oko nas postoje veličine koje su zavisne jedna o drugoj, tj. koje pridružujemo jedne drugima i izražavamo ih preko raznih tablica. Dobro je da učenicima predočimo nekoliko takvih tablica. Prilikom svladavanja svaku je novu funkciju korisno uvoditi preko tablica.

4. Dobro zadane funkcije

Vrlo je važno postići da učenik sam shvati kada je neka funkcija “dobro” zadana, tj.:

a) za koje se vrijednosti nezavisne veličine može izračunavati funkcija tj. ima li smisla izračunavati vrijednost pripadne zavisne veličine.

Duljinu prijednog puta ima smisla izračunavati samo ako je $t \geq 0$. Vrijeme u kojem određen broj radnika obavi neki posao ima smisla računati samo za prirodne brojeve (broj radnika = 1, 2, 3, ...). Glavne gradove ima smisla pridruživati samo postojećim državama. Volumen kocke ima smisla računati samo ako je brid veći od 0. Koliko god banalno nam to izgledalo, ponukajmo učenika da se svaki put zapita “ima li smisla to izračunavati”. Na taj način od početka poučavamo kritičkom načinu razmišljanja i izbjegavanju nepotrebnih radnji oko izračuna vrijednosti koje uopće nema smisla računati.

b) pravilo pridruživanja treba biti jasno i nedvosmisleno zadano. To znači da svakoj odabranoj vrijednosti nezavisne veličine možemo

pridružiti samo jednu vrijednost zavisne veličine, a ne dvije ili više njih, ili pak niti jednu.

Ako, na primjer, učeniku nekog razrednog odjeljenja pridružujemo njegovu zaključnu ocjenu iz matematike, to je dobro zadana funkcija jer točno znamo koju ćemo ocjenu kojem učeniku pridružiti. Ali ako želimo postupiti obrnuto — ocjenama od 1 do 5 pridružiti ime učenika kojem je to zaključna ocjena (iz matematike) nećemo moći konstruirati nedvosmisleno pridruživanje. Nekim ocjenama možemo pridružiti više učenika, pa se nećemo moći odlučiti samo za jedno ime, a nekim ocjenama možda nećemo moći pridružiti niti jednog učenika.

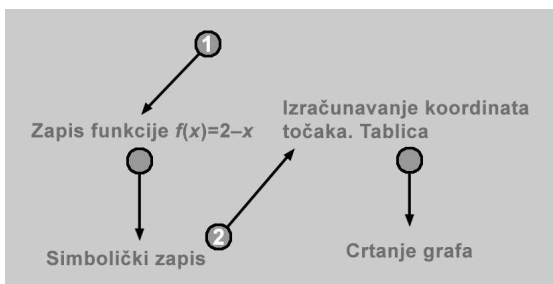
5. Grafičko zadavanje funkcija

Treći način kojim možemo zadati funkciju je grafom. Ovo će u osnovnoj školi posebno doći do izražaja kod linearne funkcije. Kasnije u srednjoškolskom obrazovanju grafu se treba posvetiti posebna pažnja kod svih funkcija koje će se obrađivati i kod svih tipova zadataka gdje se možemo osvrnuti ili pozvati na graf.

Grafom možemo zorno opisati funkciju. No iskustveno je poznato da je grafički prikaz funkcije učenicima teško razumljiv i sporo ga prihvaćaju. Neki nikada u potpunosti. Možda upravo zbog toga što se prvo krenulo s pojmom i zapisom funkcije $f(x)$ koji je učeniku apstraktan, nakon čega se tom zapisu pridružuje graf kao skup svih uređenih parova $(x, f(x))$. To je još jedno apstraktno pridruživanje s kojeg se odmah preskače na crtanje skupova točaka (x, y) (pri čemu je $y = f(x)$) u koordinatnoj ravnini. Još veći problem nastaje kod analitičke geometrije jer se uz sve opisano mora povezati i svojstvo krivulje sa zadanim grafom. Krivulje obično ne predstavljaju graf funkcije što neke učenike dodatno zbunjuje u jasnom poimanju pojma grafa.

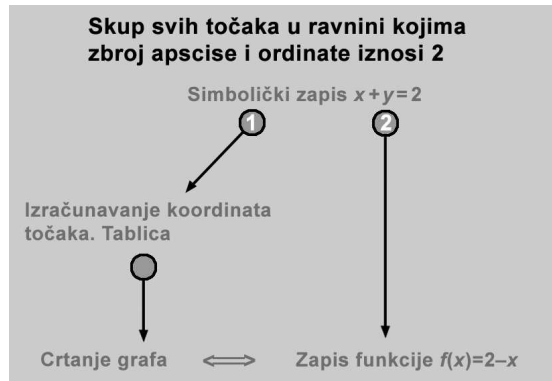
Mislim da bi eksplicitni zapis funkcije $f(x)$ trebalo uvoditi postupno. Također bi bilo dobro da se iz zapisa funkcije ne prelazi odmah na crtanje grafa pridruženog toj funkciji. Naprotiv, smatram da bi učeniku bilo lakše krenuti obrnutim putem — usvojiti prvo crtanje grafa funkcije ili krivulje prema zadanom svojstvu ili prema implicitnom zapisu, a ne prema eksplicitnom zapisu. Kada učenik savlada crtanje grafa preko izračunavanja točaka, pravo je vrijeme da se s grafom poveže zapis pripadne funkcije. Na taj se način uz neko zadano svojstvo (kojeg lako prikažemo grafički jer povezuje dvije veličine koje međusobno lako izračunamo jednu iz druge) posebno poveže graf a posebno zapis funkcije. Tada možemo uspostaviti korespondenciju između pojma funkcije i njezinog grafa.

Primjer 1. *Postojeće stanje.* Uvodi se linearna funkcija $f(x) = -x + 2$, njoj se pridružuje simbolički zapis $y = -x + 2$, izračunavaju se vrijednosti točaka i crta tablica te nakon toga graf linearne funkcije. Funkcija se uvodi na apstraktan način kojeg učenik ne može zorno predložiti niti povezati s realnom situacijom. Zatim se uvodi još jedno apstraktno pridruživanje uređenih parova $(x, f(x)) \rightarrow (x, y)$ na osnovu kojeg se crtaju točke grafa.



Alternativni prijedlog. Zadaje se svojstvo koje povezuje koordinate točaka u koordinatnoj ravnini. *Odredi skup svih točaka u ravnini kojima zbroj apscise i ordinate iznosi 2.* Učenik lako izračunava koordinate točaka iz simboličkog zapisa $x + y = 2$, koji je prirodno vezan sa zadanim svojstvom, i crta graf. Tek

kada je savladao crtanje grafa može iz zadanog svojstva i simboličkog zapisa prijeći i na zapis i pojam funkcije zamjenom $y \rightarrow f(x)$ te uspostaviti korespondenciju između grafa i funkcije.

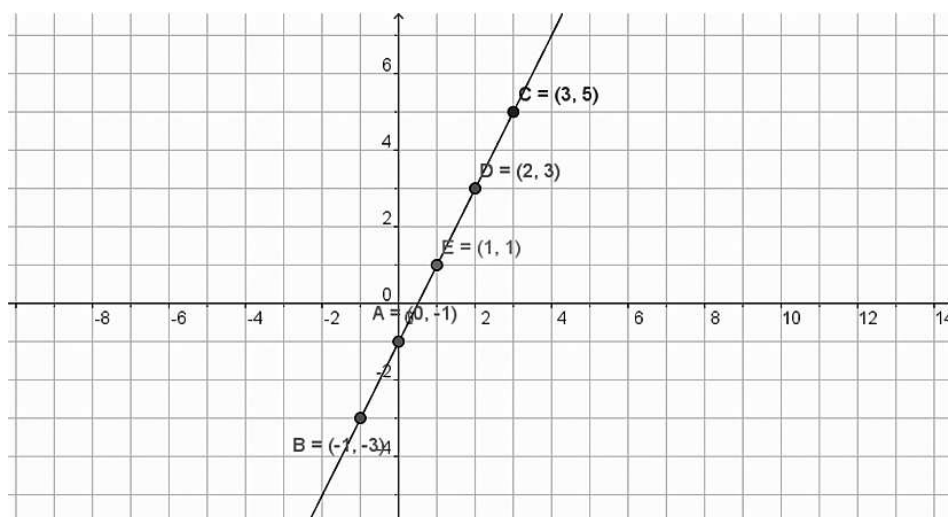
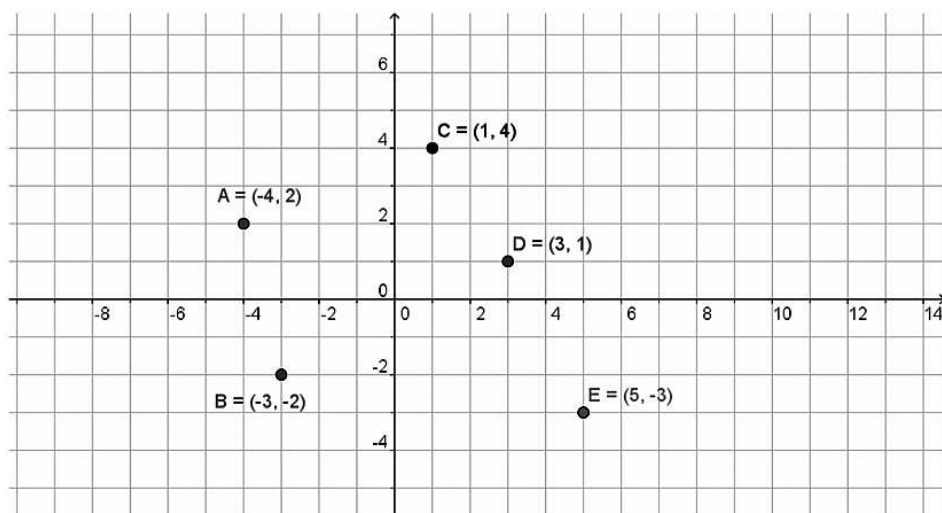


Zornost u predočavanju grafa može se postići na razne načine. Naravno, najsigurniji je klasičan način — kreda, ploča, izračunavanje točaka, njihovo crtanje u koordinatnom sustavu te povezivanje krivuljom. Uvijek je dobro pristupiti crtanju grafova upravo klasičnim metodama. Učenik treba znati izračunati točke i sam osjetiti kako se crta graf.

Međutim, danas se nastavniku i učeniku pruža novi svijet u kojem veliku ulogu mogu odigrati neki od programa za crtanje grafova na računalu i manipuliranje funkcijama, njezinim svojstvima, nultočkama, ekstremima. . . Jedan od takvih programa je *GeoGebra* — program koji povezuje geometriju i algebru. Brzina i jednostavnost baratanja ovim programom može imati važnu ulogu pri razumijevanju i svladavanju pojma funkcije.

Primjer 2. U ovoj vježbi cilj je rasporediti točke po koordinatnom sustavu tako da zadovoljavaju zadani uvjet. *Rasporedi točke tako da ordinata svake točke bude jednaka dvostrukoj apscisi umanjenoj za 1.*

Ovo je primjer zadatka izrađenog kao dinamički aplet pomoću programa *GeoGebra*.

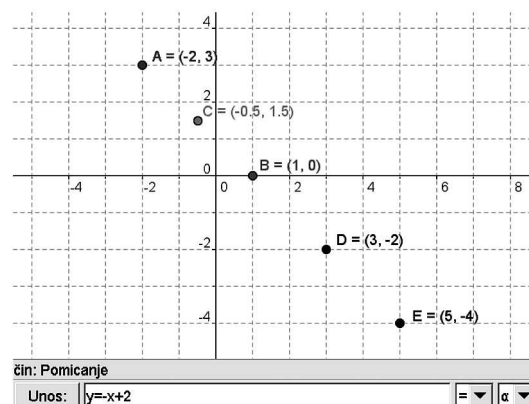


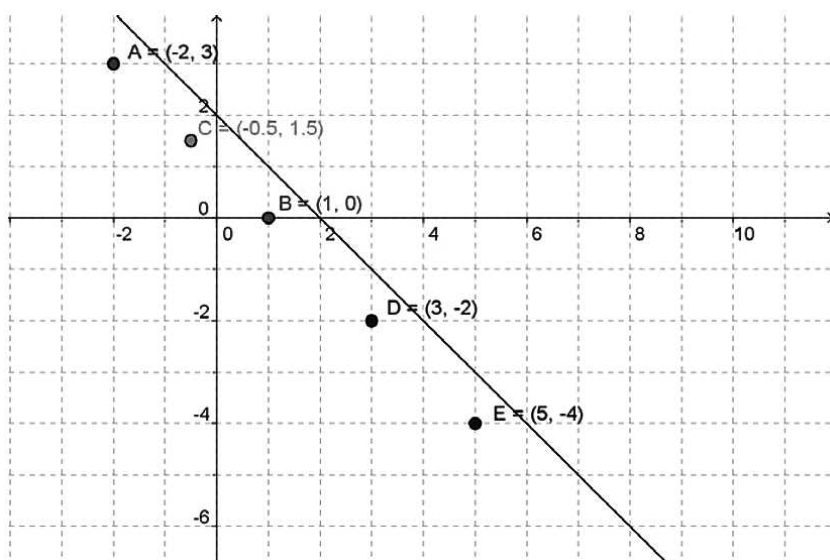
Učenik mora iz zadanog svojstva izračunavati koordinate točaka, smjestiti ih u koordinatnu ravninu i zatim dobiti graf pravca na kojem sve točke leže.

Graf pravca će dobiti jednostavnim ukucavanjem jednadžbe pravca $y = 2x - 1$. Tako je učenik zadano svojstvo povezao sa simboličkim zapisom jednadžbe pravca, a uz pomoć dinamičkog crteža i s pripadnim grafom. Ovakav će zorni prikaz pomoći učeniku u poimanju pojma grafa linearne funkcije zornom predodžbom.

Nakon toga se od učenika može tražiti da iz zadanih točaka koje pripadaju nekom prav-

cu “pročita” tj. izračuna jednadžbu pravca te provjeri je li dobro zadao jednadžbu.





* * *

Grafički je prikaz uglavnom zapostavljen u srednjoj školi. A upravo nam on pomaže u poimanju funkcije. Grafički prikaz možemo koristiti kao pomoć u rješavanju mnogobrojnih tipova zadataka a ne samo onih u kojima piše *nacrtaj graf funkcije*. Rješavanje jednadžbi i nejednadžbi, određivanje najveće ili najmanje vrijednosti na nekom intervalu ili na cijelom području definicije, određivanje intervala rasta ili pada funkcije, traženje nultočka, uočavanje slike funkcije, određivanje geometrijskog mjesta točaka koje zadovoljavaju neko svojstvo — i još mnoštvo toga. U svim takvim zadacima graf nam pomaže pri rješavanju zadataka. Naravno, treba učenike uputiti na činjenicu da graf ne mora biti pouzdan i da ono što su uočili promatrajući graf moraju pretočiti u matematički dokaz ili bar u provjeru. Ako je učenik iz grafa očitao nultočku funkcije pa zatim provjerio da je vrijednost funkcije za konkretan x jednaka nuli, treba smatrati da je zadatak ispravno riješen. Umjesto što branimo učenicima da na taj način pristupaju rješavanju mnogobrojnih zadataka iz analitičke geometrije treba ih poticati u tom smjeru. Tako se, povezujući zornost s onime što smo svladali u teoretskom dijelu, postižu najbolji rezultati u primjeni.

6. Kalkulator i računalo kao pomoć pri razumijevanju pojma funkcije (prednosti i nedostaci)

a) Samostalni rad učenika uz pomoć nastavnika u informatičkoj učionici

Prednost ovakvog načina rada je svakako to što svaki učenik može birati sam svoj tempo rada. To je posebno istaknuto kod bilo kojeg samostalnog rada na računalu jer su razlike u predznanjima i vještinama u radu s računalom kod pojedinih učenika ogromne. Učenik može kod kuće nastaviti samostalni rad na računalu (ako ima računalo — ako nema, to je ujedno i nedostatak). Što se usvajanja pojma funkcije tiče, prednosti kod razumijevanja gradiva su velike jer učenici rade s dinamičkim materijalima kakve dosada nismo mogli postići klasičnim metodama rada. Važno je napomenuti da se pri samostalnom radu na računalu postiže i održava viši nivo koncentracije kod većine učenika, a nije zanemariva ni motivacija koja je kod ovakvog načina rada viša nego kod klasičnih metoda rada.

Nedostaci su što izrada takvih materijala osim puno vremena iziskuje zaista sposobne i stručno obrazovane nastavnike matematike koji dobro barataju ne samo programima dinami-

čke geometrije i ostalim programima potrebnim za realizaciju takvih materijala, već i matematičkim znanjima i metodičkim vještinama.

b) Dinamičke prezentacije u razredu

Prednosti su u tome što se može kombinirati predavačka nastava i demonstracija, pri čemu se štedi na vremenu u neposrednom radu s učenicima tj. pri izvođenju nastavnog sata. Ovo je posebno dobro kod upoznavanja s materijalima koji iziskuju preciznost i dinamičnost koja se ne može postići crtanjem ili konstruiranjem na klasičnoj ploči.

Nedostaci: učenici nemaju tako direktan odnos s gradivom kao kod samostalnog rada. Često im bježi pažnja, a zbog previše vizualnih (zvučnih) efekata tijekom prezentacije može se izgubiti bit same nastavne jedinice. Mislim da se uvodni primjeri funkcija i ponavljanje uz sistematizaciju gradiva mogu prezentirati pomoću projektora, ali bi se zadaci za usvajanje pojma funkcije trebali raditi individualno i klasičnim metodama, ili svaki učenik pojedinačno na računalu u informatičkoj učionici.

c) Grafički kalkulator

Postavlja se pitanje ima li mu mjesta u nastavi matematike dok nastavni plan i program te nastavni materijali i udžbenici nisu prilagođeni njegovim specifičnostima?

Pretpostavljam da bi uz dobro napravljeni materijal ovo bilo prikladno za povezivanje naučenog o funkcijama sa svojstvima grafa funkcija, kod rješavanja jednadžbi i nejednadžbi, određivanja nultočaka i ekstrema. Učenik može uz pomoć grafičkog kalkulatora uočiti stvari koje dosad nije zapazio ili naučio. Stalna uporaba grafičkog kalkulatora je velika opasnost za učenika. Zato smatram da bi upotreba grafičkog kalkulatora trebala biti ograničena i to samo u učionici i tijekom nastavnog sata.

Primjena grafičkog kalkulatora kod povezivanja s tabličnim zadavanjem funkcije imala bi veliku prednost. Prednost grafičkog kalkulatora nad računalom je i u tome što ga je lako prenositi i imati uvijek pri ruci.

Nedostaci su još uvijek loša razlučivost slike, cijena (nije dostupno svima), nedostatak dobrih materijala i uputa na hrvatskom jeziku, učenik se brzo navikne i zaboravi osnovno gradivo o funkcijama i njihovim grafovima koje će mu biti neophodno na višim razinama školovanja. . .

d) Online sadržaji i materijali za samoučenje

Prednosti: samostalni rad učenika s materijalom, dostupnost iz svakog kutka svijeta i dostupnost svima.

Nedostaci: jako je malo ovakvih materijala na hrvatskom jeziku a i u svijetu, još uvijek svi učenici nemaju računalu ni vezu na internet, . . .

Evo nekoliko korisnih linkova:

- http://www.tssibenik.hr/idimasu/index_glavna.htm
- <http://public.carnet.hr/~ssuljic/>
- <http://www.cut-the-knot.org/>
- http://nlvm.usu.edu/en/nav/category_g-3_t-1.html
- <http://teams.lacoe.edu/documentation/classrooms/amy/algebra/3-4/3-4.html>

Za izradu takvog materijala, osim puno vremena, trebao bi zaista sposoban i stručno obrazovan tim nastavnika.

Sve ove spomenute metode treba koristiti pažljivo i ne prečesto. Metodički ih treba dobro pripremiti. Postoji opasnost da učenik rad u informatičkoj učionici shvati kao igru a ne kao potreban napor do usvajanja novih znanja. Nikako ne smijemo percipirati rad u informatičkoj učionici kao rad koji je sam sebi svrhom. Treba ga promišljeno uklopiti u nastavni proces. Nije dovoljno učenika pustiti za računalu i očekivati da je usvojio nastavnu cjelinu. Iza toga trebamo (po mogućnosti klasičnim metodama rada) ponavljati i utvrđivati gradivo, kao što uostalom radimo i kod svih ostalih metoda. Primijetila sam da neki nastavnici očekuju da je nakon rada u informatičkoj učionici učenik svladao nastavnu cjelinu pa odmah sljedeći sat pišu ispite znanja. Zar smo tako postupali kod klasičnih metoda rada?