Metoda pomoćnih likova

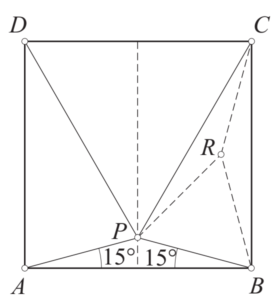
***Milan Šarić**, Kneževo*

Kod rješavanja geometrijskih zadataka često je potrebno dopuniti crtež. Kako ga dopuniti? Koji pravac povući? Do kojeg lika ga dopuniti? Koju ideju koristiti?

1. Priča prva

Zadatak: Neka je u unutrašnjosti kvadrata $ABCD$ zadana točka P takva da je $\sphericalangle PAB = \sphericalangle ABP = 15^\circ$. Dokaži da je ΔPCD jednakostraničan.

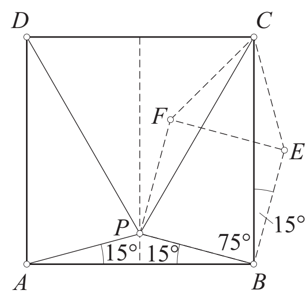
Dopuna do jednakostraničnog trokuta



Slika 1.

Neka je ΔPBR jednakostraničan (slika 1). Tada su ΔABP i ΔBCR sukladni, odnosno $|BR| = |RC|$. Dalje ΔCRB i ΔCRP su također sukladni (dvije stranice i kut među njima), pa je $|PC| = |BC|$. Kako je $|PC| = |BC| = |DC|$, ΔPCD je jednakostraničan.

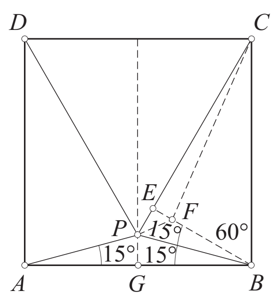
Dopuna do kvadrata



Slika 2.

Konstruirajmo nad stranicom $\overline{PB}$ kvadrat. Kako su ΔABP i ΔBEC sukladni, slijedi da je $\sphericalangle BEC = 150^\circ$, odnosno $\sphericalangle FEC = 60^\circ$. ΔFEC je jednakokračan trokut kod kojeg je jedan kut 60°, dakle jednakostraničan je. Kako je $\sphericalangle CFP = 150^\circ$, ΔBEC i ΔPFC su sukladni, pa je $|PC| = |BC|$, odnosno $\sphericalangle BPC = 30^\circ$. Dakle, ΔPCD je jednakokračan trokut kod kojeg je jedan kut 60°, dakle jednakostraničan je.

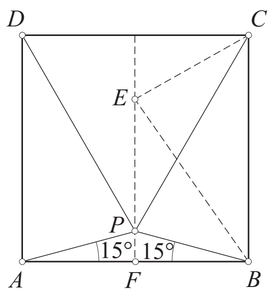
Dopuna do polovice jednakostraničnog trokuta



Slika 3.

Uočimo pravac BE takav da je $\sphericalangle PBE = 15^\circ$ i neka je CF okomica na taj pravac. ΔFBC je polovica jednakostraničnog trokuta, pa je $2|FB| = |BC|$. Kako je $|BC| = 2|BG|$, slijedi da su ΔPGB i ΔFPB sukladni, odnosno $\sphericalangle BFP = 90^\circ$. Znači da su točke P, F i C kolinearne, tj. $E = F$. Dakle, $\sphericalangle BCE = 30^\circ$, ΔPBC je jednakokračan trokut i $|PC| = |BC|$, što znači da je ΔPCD jednakostraničan.

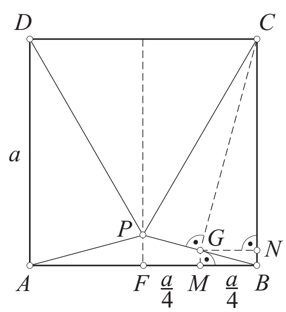
Dopuna do jednakokračnog trapeza



Slika 4.

Uočimo pravac BE takav da je $\sphericalangle PBE = 45^\circ$. ΔEBF je polovica jednakostraničnog trokuta, pa je $2|FB| = |BE|$. Kako je i $|BC| = 2|BF|$, zaključujemo da je ΔEBC jednakokračan s kutovima 75°, 75° i 30°. Dalje, zaključujemo da je četverokut $PBCE$ jednakokračan trapez s kutovima 75°, 75°, 105° i 105°, te su mu dijagonale $\overline{PC}$ i $\overline{BE}$ jednake duljine. Odavde se dokaz na već ranije opisan način privodi kraju.

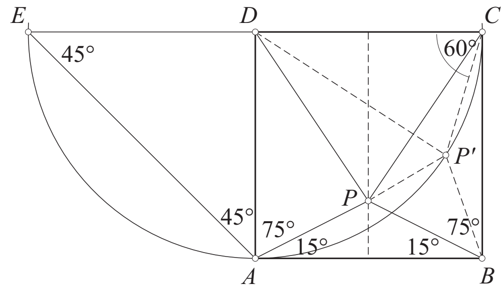
Dopuna do pravokutnog trokuta



Slika 5.

Neka je CG okomica na pravac PB, GN okomica na pravac BC, a GM okomica na pravac AB. ΔBGC je pravokutan s jednim kutom od 75°, pa je $|BC| = 4|GN|$ (dokažite!). Kako je $|GN| = |BM| = \dfrac{a}{4}$, slijedi da je $\overline{GM}$ srednjica trokuta ΔPFB. Dakle točka G je polovište dužine $\overline{PB}$ pa su ΔPGC i ΔBGC sukladni, odnosno $|PC| = |BC|$.

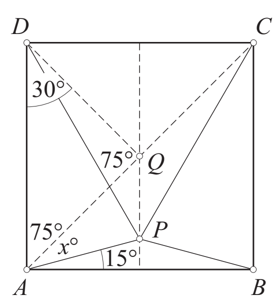
Dopuna do tetivnog četverokuta



Slika 6.

Uočimo točku E na pravcu CD takvu da je D polovište dužine $\overline{CE}$. Neka je D središte kružnice opisane oko ΔEAC. Ako točka P pripada kružnici, zadatak je riješen, jer ΔPCD je jednakokračan s krakom $|PD|$ jednakim osnovici $|CD|$, dakle jednakostraničan je. Pretpostavimo suprotno: točka P leži unutar kružnice. Neka pravac AP siječe kružnicu po drugi put u točki P'. Četverokut $EAP'C$ je tetivan pa je $\sphericalangle EAP + \sphericalangle P'CE = 180^\circ$, odnosno $\sphericalangle P'CE = 60^\circ$. Kako je $\Delta P'CD$ jednakostraničan (jednakokračan s jednim kutom od 60°), slijedi da je $\Delta P'BC$ jednakokračan s kutovima 30°, 75°, 75°. Dalje $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABP + \sphericalangle PBP' + \sphericalangle P'BC = 15^\circ + \sphericalangle PBP' + 75^\circ = 90^\circ$ iz čega slijedi da je $\sphericalangle PBP' = 0^\circ$. Dakle $P = P'$, tj. točka pripada kružnici što je kontradikcija, (suprotno pretpostavci da točka P leži unutar kružnice). Ako pretpostavimo da točka P leži izvan kružnice, zaključujemo na isti način.

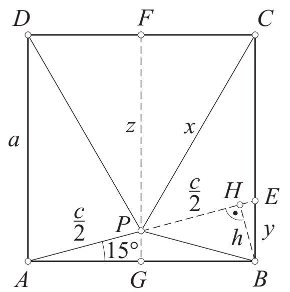
Metoda lažne pretpostavke



Slika 7.

Pretpostavimo da je ΔQCD jednakostraničan (lažna pretpostavka). Tada je ΔQDA jednakokračan $|QD| = |AD|$ s kutom $\sphericalangle QDA = 30^\circ$ i $\sphericalangle DAQ = 75^\circ$. Kako je $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAQ + \sphericalangle QAP + \sphericalangle PAB = 75^\circ + \sphericalangle QAP + 15^\circ = 90^\circ$, slijedi da je $\sphericalangle QAP = 0^\circ$. Dakle $P = Q$ i ΔPCD je jednakostraničan.

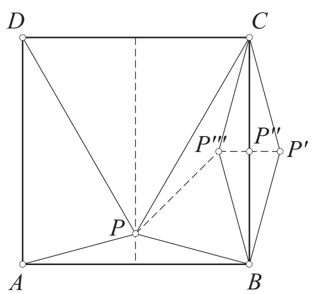
Metoda površina



Slika 8.

Neka je točka E presjek pravaca AP i BC, neka je H nožište visine iz vrha B trokuta ΔABE i neka je FG simetrala kvadrata. Uvedimo oznake $|AB| = a$, $|AE| = c$, $|BE| = y$, $|BH| = h$, $|PF| = z$, $|PC| = x$. Uočimo da je $c = 4h$ (visina na hipotenuzu trokuta s kutovima 75°, 15°). Površina ΔABE je $\frac{ay}{2}$, ali i $\frac{ch}{2}$, odnosno $ay = ch$, odnosno $ay = 4h^2$. S druge strane je $a^2 + y^2 = c^2 = 16h^2$, tj. $y^2 - 4ay + a^2 = 0$, pa je $y = 2a - a\sqrt{3}$ (zbog $0 < y < a$). Sada se lako dobije $z = a - \frac{y}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, pa je $x = a$. Dakle, ΔPCD je jednakostraničan.

Primjena rotacije

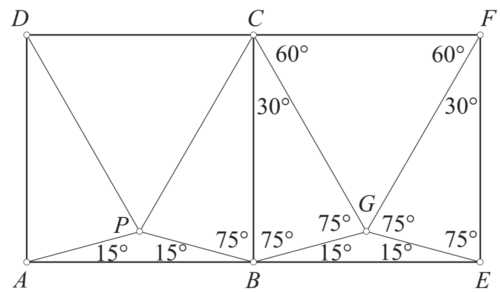


Slika 9.

Neka je $\Delta BCP'$ dobiven rotacijom ΔABP oko točke B za -90° i neka je $\Delta BCP'''$ osno simetrična slika $\Delta BCP'$ obzirom na pravac BC.

Neka je P'' presjek pravaca BC i $P'P'''$. Kako je $\sphericalangle PBP''' = 60^\circ$, $\Delta BPP'''$ je jednakostraničan trokut. Dalje, $\sphericalangle P'''PC = 15^\circ$, tako da $\Delta BCP''' \cong \Delta PCP'''$. Na osnovu toga je $|PC| = |BC|$.

Svođenje na jednostavniji slučaj



Slika 10.

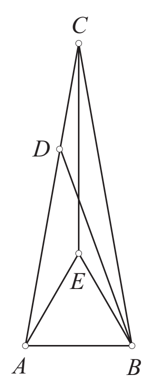
Konstruiramo kvadrat $BEFC$ nad stranicom $\overline{BC}$, a zatim konstruiramo jednakostraničan ΔCFG tako da je točka G u unutrašnjosti kvadrata $BEFC$. Trokuti ΔBEG i ΔABP su sukladni, također $\Delta BCP \cong \Delta BCG$ (sks: $\overline{BC}$ zajednička, $|PB| = |BG|$, $\sphericalangle PBC = \sphericalangle CBG = 75^\circ$). Na osnovu toga je $|PC| = |BC|$.

2. Priča druga

Ako jedan zadatak možemo riješiti nadopunom na 11 različitih načina i pritom je svaka nadopuna jednakostraničan trokut, interesantno ga je pogledati.

Zadatak: Dan je jednakokračan trokut ABC, $|AC| = |BC|$, $\sphericalangle ACB = 20^\circ$. Na stranici $\overline{AC}$ dana je točka D tako da je $|CD| = |AB|$. Izračunajte $\sphericalangle CBD$.

1. rješenje



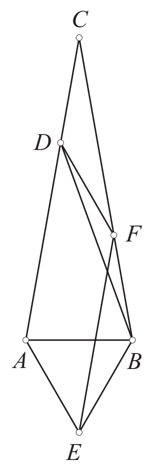
Slika 11.

1. Nad stranicom $\overline{AB}$ konstruiramo jednakostraničan trokut ABE, spojimo točke E i C.

2. $\Delta AEC \cong \Delta EBC(\text{sks}) \Rightarrow \sphericalangle ECA = \sphericalangle ECB = 10°$

3. $\Delta CDB \cong \Delta EBC(\text{sks}) \Rightarrow \sphericalangle CBD = 10°$.

2. rješenje



Slika 12.

1. Nad stranicom $\overline{AB}$ s vanjske strane konstruiramo jednakostranični trokut ABE.

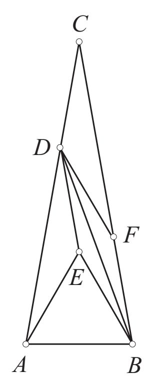
2. Na stranici $\overline{BC}$ uzmemo točku F tako da je $|CD| = |FD|$. Spojimo točke F i E.

3. Kako je $|CD| = |FD| = |AB|$ i $\sphericalangle CDF = \sphericalangle CAE = 140°$, četverokut $AEFD$ je paralelogram.

4. $\sphericalangle FEB = \sphericalangle BFE = 20° \Rightarrow |BE| = |FB|$

5. Kako je $|BE| = |FB| = |FD|$ i $\sphericalangle DFB = 160°$, slijedi da je $\sphericalangle CBD = 10°$.

3. rješenje



Slika 13.

1. Nad stranicom $\overline{AB}$ konstruiramo jednakostranični trokut ABE. Spojimo točke D i E.

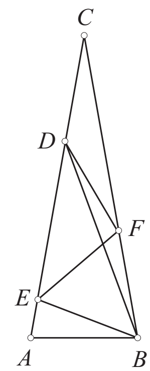
2. Na stranici $\overline{BC}$ uzmemo točku F tako da je $|CD| = |FD|$.

3. Kako je $\sphericalangle FBE = \sphericalangle CFD = 20°$ i $|BE| = |FD|$, slijedi da je četverokut $BFDE$ paralelogram.

4. Iz $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EDA = 20°$, slijedi da je $|AE| = |ED|$, tj. četverokut $BFDE$ je romb.

5. $\Delta EDB \cong DBF(\text{šs}) \Rightarrow \sphericalangle CBD = 10°$.

4. rješenje



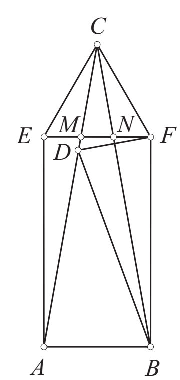
Slika 14.

1. Konstruiramo jednakostraničan trokut BEF tako da je $|BE| = |AB|$.

2. Ako spojimo F i D, uočavamo da je $|CD| = |DF|$, (dokažite)!

3. Kako je $\sphericalangle DFB = 160°(100 + 60)$ i $|BF| = |DF|$, slijedi da je $\sphericalangle CBD = 10°$.

5. rješenje



Slika 15.

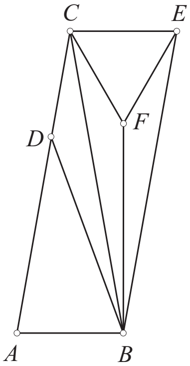
1. Konstruiramo jednakostranični trokut EFC tako da je $\sphericalangle DCE = 20°$ i $|EC| = |AB|$.

2. Kako je $|EF| = |AB|$ i $\sphericalangle CMN = \sphericalangle CNM = 80°$, slijedi da je $ABEF$ je paralelogram.

3. Iz sukladnosti trokuta EMC i CNF te AME i BFN, slijedi da je $ABFE$ je pravokutnik.

4. $\Delta CDB \cong \Delta CBF(\text{sks}) \Rightarrow \sphericalangle CBD = 10°$.

6. rješenje



Slika 16.

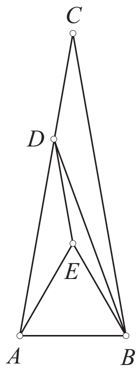
1. Konstruiramo jednakostranični trokut CFE tako da je $\sphericalangle FCB = 20°$ i $|CE| = |AB|$.

2. Kako je $|CE| = |AB|$ i $\sphericalangle ECA = 100°$, to je $ABEC$ paralelogram.

3. $\Delta CBF \cong \Delta FBE(\text{sks}) \Rightarrow \sphericalangle CBF = 10°$.

4. $\Delta CBF \cong \Delta CBD(\text{sks}) \Rightarrow \sphericalangle CBD = 10°$.

7. rješenje



Slika 17.

1. Nad stranicom $\overline{AB}$ konstruiramo jednakostranični trokut ABE.

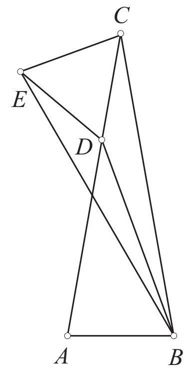
2. Četverokut $BCDE$ je jednakokračan trapez.

3. ΔAED je jednakokračan, $|AE| = |ED|$.

4. Kako je $\sphericalangle DEB = 160°$ i $|ED| = |BE|$, to je $\sphericalangle EBD = 10°$.

5. $\sphericalangle DBC = 10°$.

8. rješenje



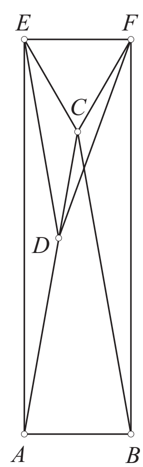
Slika 18.

1. Konstruiramo jednakostranični trokut CED i povucimo $\overline{BE}$.

2. $\Delta ABC \cong \Delta ECB(\text{sks}) \Rightarrow \sphericalangle CEB = 80°$ i $\sphericalangle EBC = 20°$.

3. $\Delta BDE \cong \Delta BCD(\text{sks}) \Rightarrow \sphericalangle DBC = 10°$.

9. rješenje



Slika 19.

1. Konstruiramo u točki C jednakostranični trokut ECF tako da je $\sphericalangle FCB = 140°$ i $|CE| = |AB|$.

2. Spojimo E i F s D.

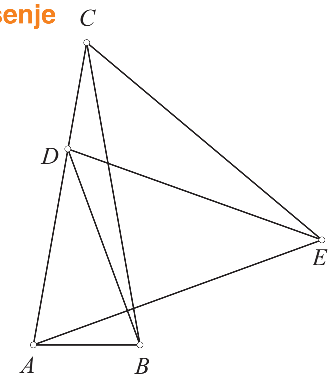
3. Četverokut $ABEF$ je pravokutnik, pa je $\sphericalangle AEF = \sphericalangle BFE = 90°$.

4. ΔDCE i ΔDFC su jednakokračni te je $\sphericalangle CED = \sphericalangle EDC = 20°$, $\sphericalangle DFC = \sphericalangle CDF = 10°$.

5. ΔADE i ΔBDF su jednakokračni te je $\sphericalangle DBF = \sphericalangle BFD = 20°$.

6. Kako je $\sphericalangle CBF = 10°$ slijedi da je $\sphericalangle DBC = 10°$.

10. rješenje



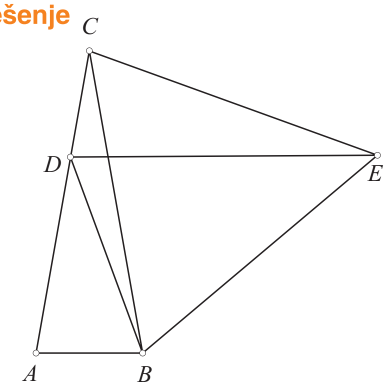
Slika 20.

1. Konstruiramo nad stranicom $\overline{AC}$ jednakostranični trokut ACE.

2. ΔBCE je jednakokračan, $|CE| = |BC|$, pa je $\sphericalangle CBE = 70°$, $\sphericalangle BCE = 40°$, $\sphericalangle AEB = 10°$.

3. $\Delta BCD \cong \Delta ABE(\text{sks}) \Rightarrow \sphericalangle CBD = 10°$.

11. rješenje



Slika 21.

1. Konstruiramo nad stranicom $\overline{BC}$ jednakostranični trokut BCE, spojimo D i E.

2. $\sphericalangle ACE = 80°$.

3. $\Delta ABC \cong \Delta CDE(\text{sks}) \Rightarrow \sphericalangle CED = 20°$ i $|DE| = |AC| = |EB|$.

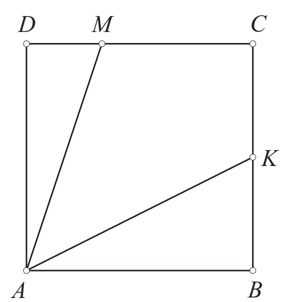
4. ΔDBE je jednakokračan, i $\sphericalangle DEB = 40°$ pa je $\sphericalangle DBE = \sphericalangle EDB = 70° \Rightarrow \sphericalangle CBD = 70° - 60° = 10°$.

3. Priča treća

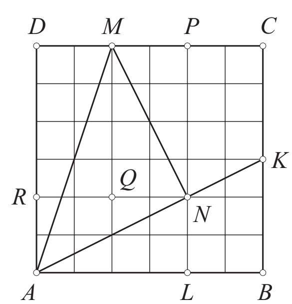
Pri rješavanju nekih geometrijskih zadataka korištenje mreža (kvadratnih, pravokutnih, trokutastih i drugih) nam omogućava da ih veoma efektno riješimo. Ideja je da geometrijski lik, ili njegov dio, prekrijemo mrežom tako da karakteristične točke lika leže u čvorovima mreže (točke presjeka paralelnih pravaca). Podudaranje karakterističnih točaka i čvorova, naravno, nije nužno već ovisi o tome što zahtijeva određeni zadatak.

Primjer 1. Zadan je kvadrat $ABCD$. Na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ zadane su redom točke K i M, tako da je $|BK| = |KC|$ i $|CM| = 2|DM|$. Izračunajte veličinu $\sphericalangle MAK$.

Rješenje. Kako točka K dijeli stranicu $\overline{BC}$ na dva dijela, a točka M stranicu $\overline{CD}$ na tri dijela, na tom ćemo kvadratu konstruirati kvadratnu mrežu 6×6 $(2 \cdot 3 = 6)$.



Slika 22.



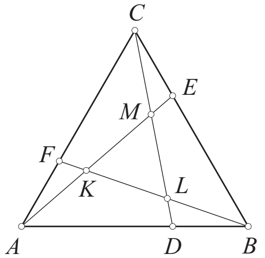
Slika 23.

Na stranici $\overline{CD}$ odredimo točku P tako da je $|CP| = |PM| = |DM|$, a na stranici $\overline{AB}$ točku L tako da je $|CP| = |LB|$. Dužina $\overline{AK}$ siječe spojnicu PL u čvoru kvadratne mreže

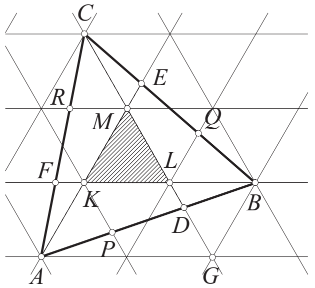
N. Spojimo M s N. Kako su trokuti ΔALN i ΔMNP sukladni (vidimo iz mreže), slijedi da je $|AN| = |MN|$ i $\sphericalangle LNA + \sphericalangle MNP = 90°$. Dakle i ΔANM je jednakokračan pravokutan, pa je $\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle MAK = 45°$.

Primjer 2. Točke D, E i F redom pripadaju stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, i $\overline{CA}$ jednakostraničnog trokuta. Pritom je $|DB| = |EC| = |FA| = \frac{1}{3}AB$. Dužine $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ i $\overline{CD}$ se sijeku u točkama K, L i M. Izračunajte površinu trokuta ΔMKL pomoću površine trokuta ΔABC.

Rješenje. Podijelimo stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta ΔABC na tri jednaka dijela. Dobivenim točkama povucimo pravce paralelne s pravcima AE, BF, CD. Takva mreža sastoji se od sukladnih trokuta. Vrhovi ΔMKL su čvorovi ove mreže.



Slika 24.

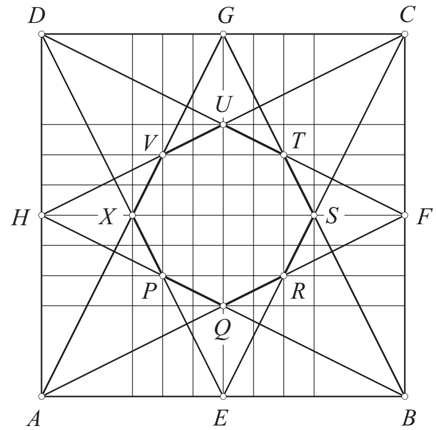


Slika 25.

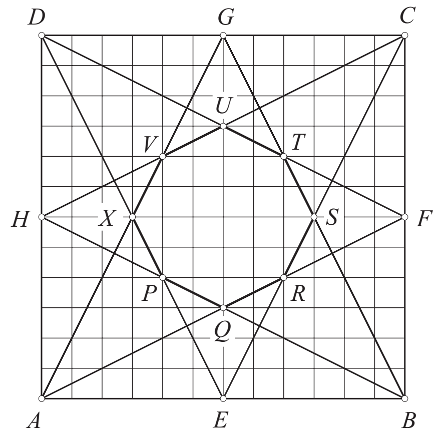
Neka je površina ΔMKL jednaka P. Tada je površina paralelograma $AGBK$ jednaka $4P$, a površina ΔABK jednaka $2P$ (polovina površine paralelograma). Analogno je površina ΔBLC jednaka $2P$ i površina ΔCMA jednaka $2P$. Tada je površina ΔABC jednaka $2P + 2P + 2P + P = 7P$, odnosno površina ΔMKL iznosi $\frac{1}{7}$ površine ΔABC.

Primjer 3. Dan je kvadrat $ABCD$. Ako svaki vrh kvadrata spojimo s polovištima stranica kojima taj vrh ne pripada, dobijemo osmerokut $PQRSTUVX$. Odredite odnos površine osmerokuta i površine kvadrata.

Rješenje. Koristeći sukladnost lako dokazujemo da osmerokut $PQRSTUVX$ ima jednake stranice, također da je $PRTV$ kvadrat, a time i da navedeni osmerokut ima jednake stranice. Također je vidljivo da je točka Q sjecište dijagonala pravokutnika $ABFH$, dakle $|QE| = \frac{1}{4}|AB|$, analogno i za S, U i X.



Slika 26.



Slika 27.

Povucimo kroz sve vrhove osmerokuta pravce paralelne sa stranicama kvadrata, a zatim mrežu "upotpunimo" pravcima kroz polovišta

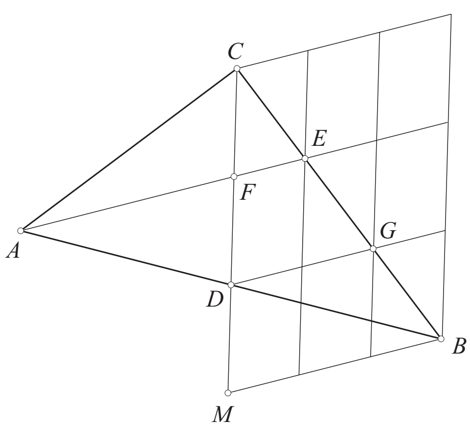
Više nego u udžbeniku

stranica $\overline{PQ}$ i $\overline{QR}$ paralelno s BC, te kroz polovišta stranica $\overline{PX}$ i $\overline{XV}$ paralelno s AB. Time smo osmerokut prekrili kvadratnom mrežom 6×6. Podijelimo dužine $\overline{QE}$, $\overline{SF}$, $\overline{UG}$ i $\overline{XH}$ na tri jednaka dijela i povucimo kroz njih pravce da završimo kvadratnu mrežu 12×12, koja pokriva kvadrat $ABCD$ čiji vrhovi leže u njezinim čvorovima. Neka je površina jednog kvadratića jednaka P. Tada je površina kvadrata $ABCD$ jednaka $144P$. Kako su površine ΔPQR, ΔRST, ΔTUV i ΔVXP jednake i iznose $2P$, a površina osmerokuta $PQRSTUVX$ jednaka je zbroju površina tih trokuta plus površina kvadrata $PRTV$, slijedi da je površina tog osmerokuta jednaka $16P + 8P = 24P$. Dakle, površina osmerokuta jednaka je $\frac{1}{6}$ površine kvadrata.

Primjer 4. (Ponekad nije potrebno cijeli lik prekriti mrežom nego samo jedan njegov dio, kao što pokazuje sljedeći primjer:)

Zadan je šiljastokutni trokut ΔABC. Točke D i E pripadaju redom stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, tako da je $|AD| = |DB|$ i $|BE| = 2|EC|$. Odredite odnos površina ΔFEC i četverokuta $FDBE$, gdje je F presjek pravaca AE i CD.

Rješenje.



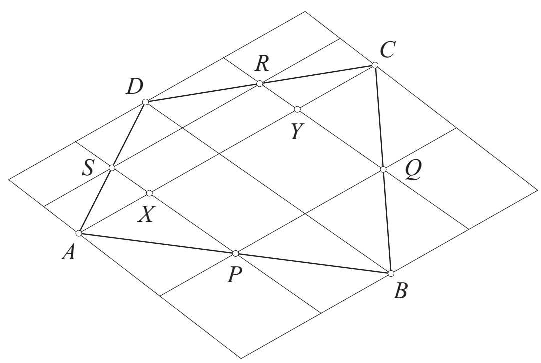
Slika 28.

Podijelimo stranicu $\overline{BC}$ na tri jednaka dijela tako da je $|CE| = |EG| = |GB|$. Kako je $|AD| = |DB|$ i $|BG| = |GE|$, slijedi da je dužina $\overline{DG}$ srednjica ΔABE i $DG \| FE$, a dužina $\overline{FE}$ srednjica ΔDGC, pa je $|CF| = |FD|$. Povucimo pravce paralelne s AE kroz točke C, F, D i B, te pravce paralelne s CD kroz točke C, E, G i B. Dobivena mreža sastavljena je od sukladnih paralelograma. Neka je površina jednog takvog paralelograma jednaka P. Tada je $P_{FEC} = \frac{P}{2}$, $P_{MBC} = 9\frac{P}{2}$. Kako je $P_{DMB} = 3\frac{P}{2}$, slijedi da je $P_{FDBE} = P_{MBC} - P_{DMB} - P_{FEC} = 9\frac{P}{2} - 3\frac{P}{2} - \frac{P}{2} = 5\frac{P}{2}$. Dakle $P_{FDBE} = 5P_{FEC}$.

Primjer 5. (Ponekad jedan dio lika možemo prekriti jednom mrežom, a drugi dio drugom kao u sljedećem primjeru)

U konveksnom četverokutu $ABCD$, P, Q, R i S su redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$. Poznato je da je površina četverokuta $PQRS$ jednaka 1. Dokažite da je površina četverokuta $ABCD$ jednaka 2.

Rješenje.



Slika 29.

Sa slike vidimo da smo četverokut $ABCD$ prekrili s četiri različite mreže. Površina četverokuta $XYRS$ jednaka je polovini površine trokuta ACD, a površina četverokuta $XPQY$ polovini površine trokuta ABC. Iz toga slijedi da je površina četverokuta $ABCD$ jednaka dvostrukoj površini četverokuta $PQRS$, dakle jednaka je 2.