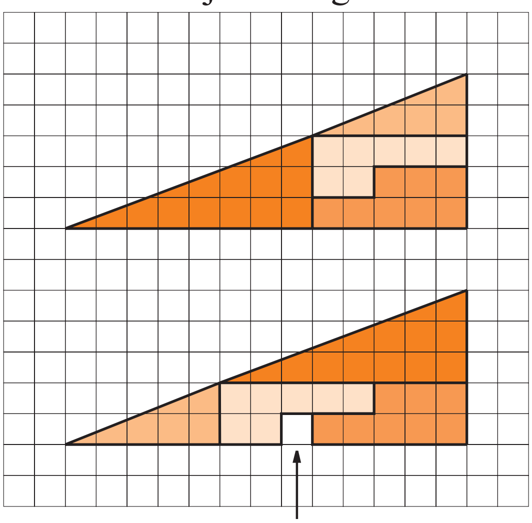
Kako je to moguće?

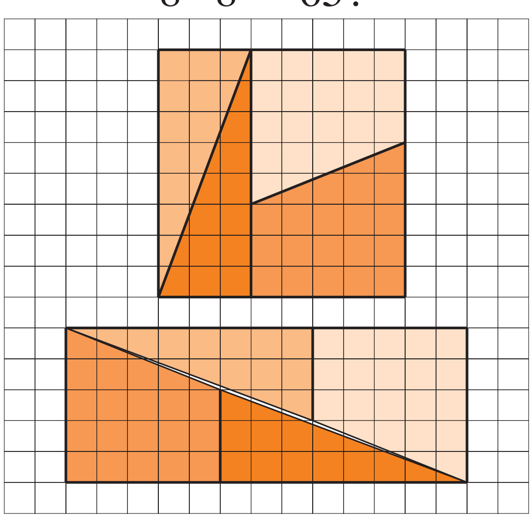
Ivan Marinović, *Zagreb*

Kako je to moguće?



Odakle se pojavila ova rupa?

$$8 \cdot 8 = 65?$$

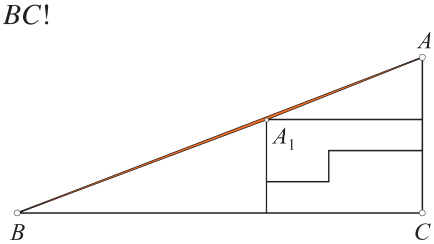


Na prethodnim slikama nalaze se "paradoksi" koje su, siguran sam, svi nastavnici matematike sreli više puta u različitim oblicima (bio je i u 12. broju *Miš*-a, str. 59.), no vrijeme je da ih upoznaju i naši učenici jer ti "paradoksi" spadaju u opću matematičku kulturu.

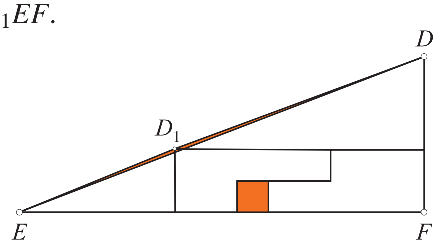
Za početak, slike možete objesiti na razredni pano, ili ih fotokopirati i podijeliti učenicima sa zadatkom da otkriju kako je došlo do ovih nelogičnosti. Može im se i zadati za zadaću da od kartona izrežu odgovarajuće likove te preslagivanjem pokušaju pronaći rješenje problema.

Na idućem satu slijedi rješenje problema, (idealno bi bilo da ga otkriju učenici):

"Trokut" ABC nije trokut već četverokut AA_1BC!



Niti "trokut" DEF nije trokut već četverokut DD_1EF.



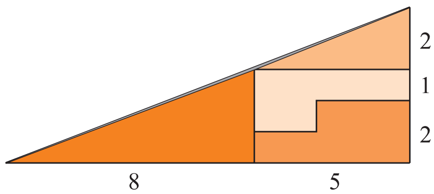
Stoga zbrojene površine narančastih trokuta daju površinu narančastog kvadrata i sve je u redu, odnosno paradoksa niti nema. Nova domaća zadaća za učenike: dokažite da "trokut" ABC nije trokut već četverokut AA_1BC.

Na sljedećem satu slijede dokazi. Ovdje ih je navedeno 7, a učenicima, ovisno o uzrastu, treba prezentirati samo one koje mogu razumjeti obzirom na obrađeno gradivo. Prvi dokaz mogu razumjeti već učenici 5. razreda osnovne škole, a zadnji tek u 3. razredu srednje škole:

1. Izračunajmo površinu pravokutnog trokuta na dva načina:

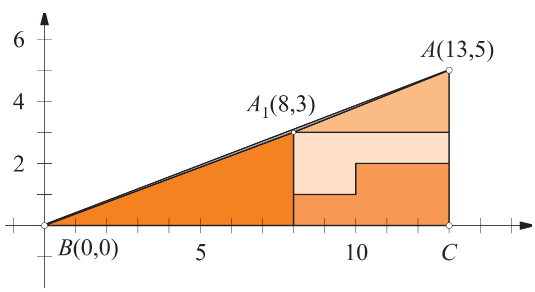
$$P = \frac{13 \cdot 5}{2} = 32.5 \text{ kv. jed.}$$

$$P = \frac{8 \cdot 3}{2} + 5 \cdot 3 + \frac{5 \cdot 2}{2} = 32 \text{ kv. jed.}$$



2. Udaljenosti. Moralo bi biti $|AA_1| + |A_1B| = |AB|$ ali nije:

$$\sqrt{29} \approx 5.385, \ \sqrt{73} \approx 8.544, \ \sqrt{194} \approx 13.928,$$
$$5.385 + 8.544 = 13.929$$



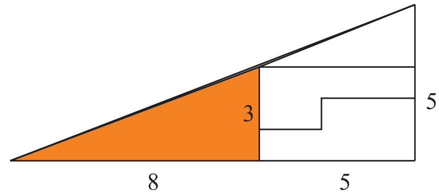
3. Kolinearnost. Točke A, A_1 i B trebale bi biti kolinearne, ali nisu:

$$P = \frac{1}{2}|0 \cdot (3-5) + 8 \cdot (5-0) + 13 \cdot (0-3)| = \frac{1}{2}.$$

4. Pravci. Pravac kroz točke A i B glasi $y = \frac{5}{13} \cdot x$, a točka A_1 ne leži na tom pravcu!

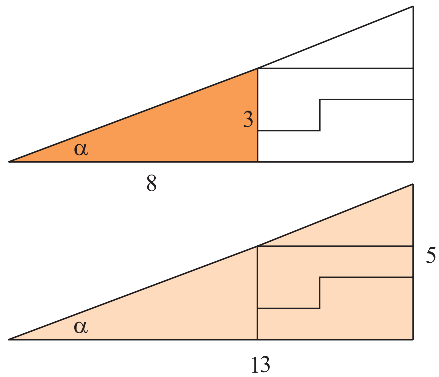
5. Sličnost. Veliki i narančasti trokut trebali bi biti slični ali nisu jer je

$$\frac{8}{3} \approx 2.67, \qquad \frac{13}{5} = 2.6.$$



6. Tangensi kutova. Tangensi kutova bi trebali biti isti, ali nisu!

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{8} = 0.375, \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{5}{13} \approx 0.3846.$$



7. Vektori. Vektori $\overrightarrow{AA_1} = -5\vec{i} - 2\vec{j}$ i $\overrightarrow{A_1B} = -8\vec{i} - 3\vec{j}$ (vidi sliku uz 2.) trebali bi biti kolinearni ali nisu.

* * *

Ovi dokazi predstavljaju jednu "šetnju" kroz matematičko obrazovanje naših učenika, te pokazuju da se istoj stvari može prići iz različitih vizura.

Učenicima sada treba objasniti još i "$8 \cdot 8 = 65$" s druge slike, te im reći da je to samo još jedna varijanta istog problema.

Ova tema se zgodno može obraditi i uz pomoć programa *The Geometer's Sketchpad*, jer animacija i zumiranje objekata daje dodatnu uvjerljivost. Gotovu prezentaciju možete dobiti ako mi se javite na

`ivan.marinovic1@zg.t-com.hr`.

Ako se eventualno sjetite još nekog načina kojim bi se pokazalo da "trokut" nije trokut već četverokut, molim javite mi, bio bih Vam jako zahvalan.