Do vjerojatnosti preko skupova

Ela Rac Marinić Kragić, Zagreb

Problem nastave vjerojatnosti i kombinatorike provlači se duže vrijeme. U gimnazijama je samo u programu prirodoslovno-matematičke gimnazije. Kako je u općoj i jezičnoj gimnaziji tjedno opterećenje matematikom svega tri sata u trećem i četvrtom razredu, iz programa je moralo biti nešto izostavljeno. Sačuvana je trigonometrija i analiza na uštrb vjerojatnosti. Nisam sigurna je li to optimalno riješeno. Naši se programi nisu mijenjali decenijama, osim što je ponešto izostavljano iz njih. Je li to u skladu sa stvarnim potrebama ili je rezultat prevelike inertnosti našeg sustava obrazovanja? Ostaje činjenica da se neki od naših učenika nakon što završe gimnaziju te i poneki jači tehnički fakultet (npr. FER u Zagrebu) nikada ne sretnu s osnovama teorije vjerojatnosti ili statistike.

Problem počinje još od osnovne škole. Iako su djeca već u nižim razredima osnovne škole sposobna rješavati jednostavnije zadatke iz kombinatorike i statistike (prebrojavanje, razvrstavanje, sistematiziranje – naravno na nivou primjerenom njihovom uzrastu) u svojim udžbenicima uglavnom neće sretati zadatke takvog tipa.

Nadalje, učenike se ni kroz osnovnu ni kroz srednju školu ne priprema na primjeren način za susret s tom granom matematike. Vjerojatnost na najjednostavniji način možemo uvesti preko osnova teorije skupova. Događaje i algebru događaja opisujemo putem skupova, podskupova i operacija sa skupovima. Naravno, ako učenik nikada prije četvrtog razreda gimnazije nije sustavno obradio osnove teorije skupova (pojam skupa i elementa skupa, podskupa, unije, presjeka, diferencije, a nije na odmet upoznati se i s Kartezijevim produktom skupova, teoremom o uključivanju i isključivanju, partitivnim skupom) biti će puno teže ostvariti takav jednostavan pristup teoriji vjerojatnosti.

Potreba za uvođenjem teorije skupova u nastavu matematike

Zahvaljujući promjenama u nastavnim programima matematike skupovi su kao zasebna cjelina izbačeni iz programa osnovne škole. Pri tome nisu stavljeni u programe srednjih škola. To i ne bi bilo tragično da se pristup ostalim granama matematike koje su se temeljili na teoriji skupova tomu prilagodio. No nastava je ostala kakva je bila i prije iako je osakaćena za osnovna poglavlja o skupovima. Tako se često već u osnovnoj školi pojavljuju oznake za skupove, elemente, spominju se podskupovi, operacije sa skupovima a da učeniku nisu posve jasni ti pojmovi. Još je gore u srednjoj školi u kojoj pojedina poglavlja vrve puno zahtjevnijim elementima teorije skupova. Već na samom početku, u prvom polugodištu u svim vrstama gimnazija obrađuje se cjelina *Uređaj na skupu realnih brojeva*. Iskusan nastavnik matematike zna kako je to teško izvesti bez operacija sa skupovima (unija, presjek, diferencija intervala) ili bar osnova matematičke logike (disjunkcija i konjukcija, tj. veznici *ili*, *i*). Tako se najednom nađemo u složenoj situaciji kako učeniku objasniti gdje će rabiti uniju, a gdje presjek, tj. gdje veznik *ili*, a gdje veznik *i*.

Zato ne čudi činjenica da mnogi nastavnici ne vole obrađivati *Vjerojatnost* i *Kombinatoriku*. U pojedinim izvedbenim (operativnim) programima cjeline *Kombinatorika* i *Vjerojatnost* stavljene su na kraj jer se tada ionako ne stignu obraditi. Time su uštedjeli mukotrpan posao hodanja po neutabanu terenu. Smisleno bi se ove cjeline puno bolje nadovezivale na cjelinu o brojevima, a prije cjeline o nizovima, kako je to u udžbeniku za četvrti razred prirodoslovno matematičke gimnazije Dakić, Elezović [1] i načinjeno.

Da bismo izbjegli problem upoznavanja sa osnovama teorije skupova u trenutku kada je to najpotrebnije – to je već u cjelini *Uređaj na skupu realnih brojeva* koja je učenicima već sama po sebi dosta teška, bilo bi dobro uvesti skupove na početku prvog razreda. Tada bi trebalo obraditi osnovne pojmove, operacije sa skupovima, uvesti Euler Vennove dijagrame, opisati partitivni skup i ostaviti učenicima da sami zaključe koliko on ima elemenata.

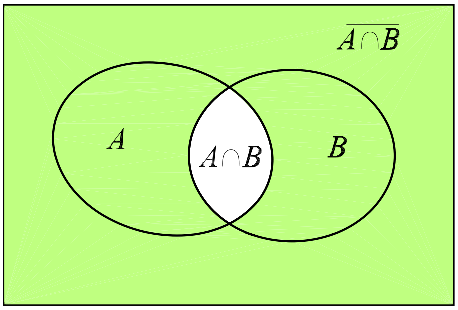
U drugom polugodištu, kod uvođenja koordinatnog sustava u ravnini bilo bi dobro uvesti Kartezijev produkt skupova.

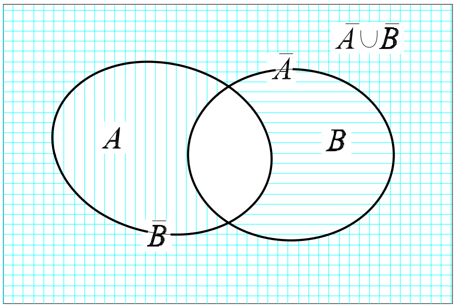
Osnove matematičke logike također su važne za zahtjevniji rad s učenicima. Naravno, kako u programu toga nema, događa se da se s pojedinim pojmovima kao što su implikacija ili ekvivalencija učenici sretnu tek u trećem razredu gimnazije, na nastavi logike. Važno je učeniku ukazati na razliku između nužnog i dovoljnog uvjeta, između izreke neke tvrdnje i obrata tvrdnje. Od toga se ne mora graditi duboka teorija. Dovoljno je na nekim teoremima i nekim tvrdnjama ukazati na razlike i na suštinu. Već u prvom razredu možemo na to ukazati učenicima kod pojedinih poučaka (Pitagorin poučak, tetivni i tagencijalni četverokut. . .) i njihovih obrata. Treba povremeno tome pokloniti nešto pažnje.

Kada smo došli do *Kombinatorike* važno je težište baciti na teorem o uzastopnom prebrojavanju i što više na njemu inzistirati, a permutacije, kombinacije i varijacije uvesti samo kao posljedicu tog teorema i više uz put. Što manje koristiti već gotove formule za izračunavanje broja permutacija, varijacija ili kombinacija, a što više ostaviti učeniku da sam prebraja. Važno je i u ovom dijelu uočiti razliku između množenja ili zbrajanja broja elemenata pojedinih skupova. Zgodno je pokušati upozoriti na suprotne tvrdnje – njihove izreke, i na prebrajanje elemenata skupova koji su opisani takvim tvrdnjama.

Primjer 1. Zadan je skup $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Koliko njegovih podskupova postoji koji ne sadrže elemente 1 i 2?

Na izgled jednostavan zadatak ali već kod samog početka će se većina učenika zabuniti. Pitanje je ekvivalentno sljedećem pitanju: "*Koliko njegovih podskupova postoji koji ne sadrže element 1 ili ne sadrže element 2?*" Naravno da učenik ne razmišlja na taj način. On će instiktivno prebrojiti sve podskupove koji ne sadrže niti 1 niti 2 istovremeno. Neće promatrati one podskupove koji sadrže samo 1 ali ne sadrže 2, ili obratno, sadrže 2 ali ne sadrže 1. Dakle, instiktivno učenik samo prebraja sve podskupove skupa $S' = \{3, 4, 5\}$. To je naravno pogrešno. Ako pitanje izreknemo kao u navodnicima tada će učeniku biti jasnije što se traži. Ako smo ikada prije objašnjavali DeMorganove zakone učenik će lako razumjeti o čemu se radi. Ako nismo, eto nam prilike da pokušamo! Ovo zorno možemo prikazati slijedećim Euler Vennovim dijagramom:





Pri tome s A obilježimo sve podskupove koji sadrže 1, s B sve one koji sadrže 2. Oni koji **ne**(**sadrže 1 i 2**) nalaze se u komplementu skupa $A \cap B$, što je na prvom dijagramu skup $\overline{A \cap B}$, (ispunjen bojom). Na drugom dijagramu skicirajmo skupove koji (**ne sadrže 1**)**ili**(**ne sadrže 2**), tj. skup $\overline{A} \cup \overline{B}$, (iscrtkan bilo kojom linijom, horizontalnom ili vertikalnom). Uočimo da su ovi skupovi ekvivalentni.

Zadatak možemo, nakon što smo ga razjasnili i razumjeli rješavati na dva načina. Prvi je jednostavnim prebrajanjem svih podskupova koji odgovaraju uvjetima zadatka.

Možemo prebrojiti sve podskupove koji uz element 1 još sadrže niti jedan, jedan, dva ili tri elementa, tj. naći kardinalni broj partitivnog skupa skupa $S' = \{3, 4, 5\}$; istu stvar napraviti i sa elementom 2, i na kraju naći sve podskupove skupa $S' = \{3, 4, 5\}$, koji ne sadrže niti 1 niti 2. Prvih, drugih i trećih podskupova ima po 2^3 tj. 8, pa je ukupno traženih skupova $3 \cdot 8 = 24$.

Još je lakše izreći suprotnu tvrdnju, tj. tražiti: *Koliko njegovih podskupova postoji koji sadrže elemente 1 i 2?*, a preostali skupovi čine rješenje zadatka. Dobiveni broj oduzmemo od ukupnog broja svih podskupova skupa S kojih ima $2^5 = 32$.

Lako je naći broj svih podskupova koji sadrže 1 i 2. Nakon što smo izuzeli elemente 1 i 2 ostao nam je skup $\{3, 4, 5\}$, a taj skup ima 8 podskupova. Oduzimanjem odmah nađemo da je traženi broj 24.

Smatram da se na ovakvim zadacima treba duže zadržati i da je puno važnije da učenik razumije što se od njega traži nego sam način rješavanja problema. Ako ne ide drugačije, neka učenik ispiše sva moguća rješenja. Dobro je i inzistirati da učenik iako je točno riješio zadatak zna izreći suprotnu tvrdnju ili da zna objasniti riječima kako je došao do rješenja.

Nakon što savlada osnovne stvari učenik lakše prihvaća i osnove vjerojatnosti koje se nadovezuju na kombinatoriku.

Najveću važnost kod vjerojatnosti treba posvetiti upravo uvođenju pojma elementarnog događaja i događaja, te algebre događaja. Na tome se treba najviše zadržati i posvetiti dovoljno pažnje. Jasno je da se na ovom mjestu ne mogu prvi puta uvoditi osnove teorije skupova jer bi to samo dodatno otežalo razumijevanje ovog logički zahtjevnog gradiva.

Zato je neophodno ranije razraditi osnove teorije skupova, pa i osnove matematičke logike. Moram reći da je u udžbeniku za prirodoslovne gimnazije od B. Dakića i N. Elezovića [1] algebra događaja razrađena na primjeren način. Nastavniku ostaje samo da dobro izabranim primjerima učenicima još više približi operacije s događajima. Taj dio gradiva lijepo usvajaju i učenici kojima matematika ide malo teže. Njih čak i vesele takvi zadaci jer nema puno računa, formula i matematičkih trikova koje moraju znati da bi se izvukli iz zahtjevnijih zadataka.

Ako učenik ponegdje zapne u rješavanju zadataka na algebri događaja treba ga uputiti da nacrta Euler Vennov dijagram s kojeg većina njih odmah očitaju ispravno rješenje. Učenici u pravilu nemaju problema da zaključe da li će rabiti uniju ili presjek događaja, kako odrediti suprotan događaj ili prebrojiti njihove elemente. A to je osnovno što trebaju usvojiti u teoriji vjerojatnosti. Jako važnu ulogu treba posvetiti zornim prikazima i što više crtati i prebrajati, a što manje govoriti učeniku kojom metodom rješavati pojedine probleme.

Na samom početku dobro je ponuditi učeniku pokus bacanja novčića ili kocke pa neka on sam pokuša odrediti elementarne događaje i prebrojiti koliko ih ima. Naravno, stvar se komplicira ako se kocka ili novčić bacaju više puta. Događaji se na početku opisuju riječima, a učenik to pretače u skupove i operacije na skupovima. Tamo gdje zapne u pomoć uskaču već spomenuti Euler Vennovi dijagrami. Nakon toga se može preći i na simboličko zapisivanje događaja i operacija s događajima.

Zgodan je primjer iz već spomenutog udžbenika [1]:

Primjer 2. Novčić bacamo dok se dva puta za redom ne pojavi isti znak, a najviše pet puta. Opiši elementarne događaje u skupu Ω i u slijedećim događajima:

$$A = \{\text{pokus je završen u trećem bacanju}\},$$
$$B = \{\text{pokus je završen u prva tri bacanja}\}.$$

Odredi $\overline{B}$.

Prvi problem već nastaje kod određivanja prostora elementarnih događaja Ω. Problem nastaje stoga jer učenici ne čitaju pažljivo zadatak i ne da im se zamisliti nad postavljenim problemom. Tu je najopasnija nestrpljivost nastavnika. Treba pustiti učenika da pogriješi te da se sam ispravi. Učenik će rijetko odmah doći do ispravnog rješenja. Većina učenika ispisuje sve elementarne događaje u pet bacanja novčića (kojih ima 32) i ne brine ih dodatni uvjet – dok se dva puta nije pojavio isti znak. Tek tada počnu staloženo razmišljati i napišu ispravno rješenje:

$$\Omega = \{PP, GG, PGG, GPP, PGPP, GPGG, PGPGP, PGPGG, GPGPG, GPGPP\}.$$

Sljedeći problem nastaje kod traženja događaja A i B. Oni su učenicima na prvi pogled jednaki i čemu ih izricati kao dva događaja? Kratkim razmišljanjem doći će ipak do zaključka da je $A \subset B$, tj. događaj A **povlači** događaj B, tj. broj bacanja novčića kod događaja B može biti dva ili tri, dok za događaj A on iznosi točno tri. Nakon toga lako je opisati tražene događaje.

$$A = \{PGG, GPP\},$$
$$B = \{PP < GG < PGG < GPP\},$$
$$\overline{B} = \{PGPP, GPGG, PGPGP, PGPGG, GPGPG, GPGPP\}.$$

U udžbeniku [1] je ponuđeno puno primjera i zadataka na kojima s učenicima vježbamo operacije s događajima i važnost usmenog opisivanja događaja, kao i upotrebu veznika *i*, *ili* pri opisivanju događaja (presjeka, unije događaja). Važnost treba pridati kako iskazivanju događaja, tako i njegovog suprotnog događaja. Jednostavan je primjer za to događaj u kojem se traži da "se bar jedan put pojavilo traženo svojstvo" ili njemu suprotan događaj u kojem se "niti jedamput ne pojavljuje traženo svojstvo". Učenik brzo uvidi da je ponekad puno lakše prebojiti koliko elemenata sadrži suprotan događaj, pa oduzeti taj broj od svih elementarnih događaja skupa Ω.

Primjer 3. Novčić bacamo pet puta. Od koliko se elementarnih događaja sastoji događaj

$$A = \{\text{pismo je palo barem jednom}\}?$$

Učenik lako zaključi da se prostor elementarnih događaja Ω satoji od 2^5 elementarnih događaja (u svakom bacanju može se pojaviti pismo P ili glava G). Događaj $\overline{A} = \{\text{pismo nije palo niti jednom}\}$ sadrži samo jedan elementarni događaj, $GGGGG$, pa se prema tome događaj A sastoji se od $32 - 1 = 31$ elementarnih događaja.

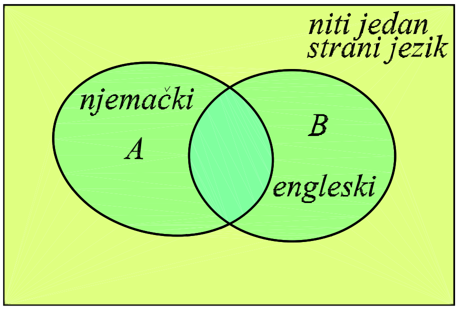
Kod samog uvođenja algebre događaja, unije i presjeka događaja važno je napomenuti i to da vjerojatnost unije događaja nije jednaka zbroju vjerojatnosti osim kada se radi o disjunktnim događajima. I to je najlakše pokazati Euler Vennovim dijagramima i dozvoliti učenicima da sami prebrajaju koliko elemenata pojedini skupovi imaju. Još je lakše ovo razjasniti ako se ranije kod obrade skupova radila i formula uključivanja i isključivanja.

Primjer 4. U nekom je razredu 38 učenika. Njemački kao drugi strani jezik uči 10 učenika, a 11 učenika uči engleski kao drugi strani jezik. 22 učenika ne uči niti jedan drugi strani jezik. Kolika je vjerojatnost da ćemo otvarajući na sreću imenik otvoriti učenika koji uči bar jedan drugi strani jezik? A kolika vjerojatnost da ćemo otvoriti učenika koji uči oba strana jezika?

Opišimo slijedeće događaje:

$$A = \{\text{učenik uči njemački kao drugi strani jezik}\},$$
$$B = \{\text{učenik uči engleski kao drugi strani jezik}\},$$
$$C = \{\text{učenik ne uči niti jedan drugi strani jezik}\},$$
$$A \cup B = \{\text{učenik uči njemački ili engleski kao drugi strani jezik}\},$$
$$A \cap B = \{\text{učenik uči njemački i engleski kao drugi strani jezik}\},$$
$$\Omega = \{\text{učenik pripada promatranom razredu}\}.$$

Treba odrediti koliki je kardinalni broj skupa $A \cup B$ i skupa $A \cap B$. Nacrtajmo dijagram:



Kako skupovi A i B nisu disjunktni, tj. njihov presjek ne može biti prazan skup (zbrajanjem učenika sa svojstvima A, B i C dobiva se broj veći od 38 koliko je ukupno učenika u razredu) vrijedi:

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B)$$

(formula uključivanja i isključivanja),

pri čemu k označava kardinalni broj skupa.

Također ovdje možemo napomenuti da vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

S dijagrama lako uočimo da vrijedi $k(A \cup B) = k(\Omega) - k(C) = 38 - 22 = 16$. Tada možemo zaključiti da vrijedi $16 = 10 + 11 - k(A \cap B)$, tj. učenika koji uče oba strana jezika ima 5.

Sada lako izračunamo i vjerojatnosti

$$P(A \cup B) = \frac{16}{38} = \frac{8}{19}, \quad P(A \cap B) = \frac{5}{38}.$$

Važno je formulu uključivanja i isključivanja generalizirati na uniju triju ili više skupova:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) =& P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ & - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) \\ & + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ & - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) \\ & - P(C \cap D) + P(A \cap B \cap C) \\ & + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) \\ & - P(A \cap B \cap C \cap D). \end{aligned}$$

Potreba za preciznom formulacijom problema

U zbirkama i udžbenicima se često pojavljuju zadaci kod kojih je bitno igra li poredak elemenata nekog skupa važnu ulogu ili ne. U takvim je zadacima potrebno naznačiti da li se rješenje zadatka traži bez obzira na poredak elemenata skupa ili uzimajući u obzir da različiti poredak znači i različita rješenja.

Pogledajmo slijedeći primjer:

Primjer 5. Trideset ljudi glasa za 5 prijedloga. Na koliko načina mogu rasporediti glasove, ako svaki glasa samo za jedan prijedlog?

Ovdje se nameće slijedeće razmišljanje:

a) Ako je važno samo koliko je glasova koji prijedlog dobio, tada zadatak ima manje rješenja.

b) Ako je k tome važno koja je osoba glasala za koji prijedlog, tada će broj mogućnosti biti znatno veći.

U slučaju a) problem rješavamo na isti način kao da se radi o raspodjeli 30 jednakih predmeta na 5 osoba (vidi [1], stranica 112, Primjer 9.) i tada je broj mogućih raspodjela $\binom{34}{4} = 46\,3760$. U slučaju b) broj mogućnosti iznosi $5^{30} = 9.31323 \times 10^{20}$. U ovom zadatku bi dobro bilo napomenuti da li se misli na varijantu a) ili b).

Ponekad zbog manjkavosti i nepreciznosti govornog jezika ili zbog nedovoljnog opisa uvjeta zadatka može doći do nerazumijevanja ili do višeznačnosti pa je najbolje opisivati željene situacije dodatnim pojašnjenjima ili s više teksta u zadatku. Takav je primjer s dizalom i ljudima koji iz njega izlaze na različitim katovima.

Primjer 6. U zgradi od deset katova je dizalo, a u dizalu troje ljudi, muškarac, žena i dijete. Ako svatko izlazi na različitom katu na koliko se načina može isprazniti dizalo?

Zadatak je iz [1], a ponuđen je odgovor $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 3!$ Pretpostavljamo da prva osoba može izabrati kat na kojem će sići na 10 načina, druga na 9 a treća na 8. Zatim još i permutiramo redosljed izlazaka triju osoba i dobijemo ponuđeno rješenje.

Neki su od učenika razmišljali ovako: ako su tri osobe ušle u dizalo (vjerojatno u prizemlju zgrade, iako nije nužno) logično je da dizalo neće ići gore – dolje već će ići samo prema gore, najkraćim putem. Ta tko još ulazi u dizalo i vozika se između katova?

Učenici su ponudili rješenje $\binom{10}{3} \cdot 3!$ – izbor kata na kojem osobe izlaze puta redosljed izlaska triju osoba. Kako okriviti učenika za takvo razmišljanje? U takvim škakljivim zadacima možda treba dodati još pokoju rečenicu – npr. kod zadatka bi trebalo pisati "pri čemu dizalo može ići i gore i dolje".

* * *

Ove sam primjere navela samo da ukažem na važnost formulacije zadatka, razumijevanja problema i formulacije načina rješavanja zadatka. Ako se ipak dogodi da dovoljno nismo pojasnili zadatak jer nismo razmišljali o mogućem drugačijem načinu shvaćanja od strane učenika ili druge osobe, tada se moramo zadovoljiti i s različitim načinima rješavanja i prihvatiti ih kao ispravne. Posebice je ovo važno kod pismenih ispita gdje učenik obično ne postavlja pitanje te mu ne možemo reći na što se mislilo kod sastavljanja zadatka.

Ovaj članak sam pisala s nakanom da se osvrnem na neke osnovne nedoumice koje su i mene mučile prilikom obrade cjelina *Kombinatorika* i *Vjerojatnost*, kao i na probleme na koje učenici mogu nailaziti prilikom susreta s ovim gradivom. Cilj mi nije bio sustavno se osvrnuti na uvod u vjerojatnost koji se obrađuje u gimnazijskom programu. To je na primjeren način napravljeno u [1], no ipak nastavniku treba iskustva da bi se snašao u tim posve novim cjelinama. Glavni problem kojeg ja uviđam je nesustavna obrada osnova teorije skupova i osnova matematičke logike koja bi trebala prethoditi ovoj cjelini. Ako učenike nismo postepeno pripremali na taj način, rezultati vjerojatno neće biti ohrabrujući.

Literatura

[1] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4 – Brojevi, kombinatorika, vjerojatnost, nizovi*, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred prirodoslovne gimnazije, Element 2003.

[2] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2 – Algebra*, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred prirodoslovne gimnazije, Element 2001.

[3] Pavković, Svrtan, Veljan, *Matematika, (kombinatorika, statistika, elementi teorije vjerojatnosti)*, zbirka zadataka s uputama i rješenjima, Školska knjiga 1993.

[4] B. Dakić, *Zbirka zadataka s pismenih ispita četvrti razred gimnazije*, Element 1997.

* * *

B.C.PRETPOTOPNJACI