Zlatni rez i harmonička četvorka točaka

Damir Horvat, *Varaždin*

Zlatni rez zauzima važno mjesto u matematici, umjetnosti i svakodnevnom životu. U starom Egiptu započinje povijest zlatnog reza u umjetnosti. Smatra se da su Egipćani upotrebljavali zlatni rez, iako ga nigdje eksplicitno ne spominju, što upućuje na činjenicu da nisu bili svjesni njegove vrijednosti. Oko 300. g.pr.n.e. Euklid iz Aleksandrije u svojim "Elementima" govori o pitanjima geometrije i proporcija, te precizno govori o podjeli dane dužine tako da se manji dio odnosi prema većem kao veći prema cjelini. Grci su se svjesno koristili matematičkim formulama koje su određivale lijepe proporcije, pa se zbog toga govori da su oni pronalazači zlatnog reza. Nakon Grka i Rimljana zlatnim su se rezom bavili mnogi umjetnici koji su ga više ili manje svjesno ugrađivali u svoja djela. 1509. godine fra Luka Pacioli ga u svojoj knjizi *Divina proportione* (Božanski razmjer) naziva i božanskom proporcijom.

Sl. 1.

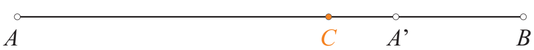
Definicija. Kažemo da točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru zlatnog reza ako vrijedi

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

No, tada je također

$$\frac{|BA|}{|CA|} = \frac{|BC|+|CA|}{|CA|} = \frac{|BC|}{|AC|}+1$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}+1}+1 = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Prema tome, tada i točka A dijeli dužinu $\overline{BC}$ u omjeru zlatnog reza. Pogledamo li sliku 1. vidimo da se točka A nalazi izvan dužine $\overline{BC}$. Isto tako, znamo da na dužini $\overline{BC}$ postoji točka A' koja je dijeli u omjeru zlatnog reza. Dolazimo do zaključka da točka zlatnog reza nije jedinstvena ako dozvolimo da se ona smije nalaziti i izvan dužine.



Sl. 2.

Ovo razmatranje nas dovodi do sljedećeg općenitijeg problema.

Zadane su tri različite kolinearne točke A, B i C. Koristeći samo ravnalo, konstruirajmo točku D na pravcu AB, koja dužinu $\overline{AB}$ dijeli u istom omjeru kao i zadana točka C.

Drugim riječima, treba naći točku D takvu da vrijedi

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Da bismo riješili taj problem, trebat će nam dva poučka koje ćemo sada izreći i dokazati.

Menelajev poučak. Neka je zadan trokut ABC i točke P, Q, R redom na pravcima BC, CA i AB. Ako su točke P, Q i R kolinearne, onda vrijedi

$$\frac{|AR|}{|BR|}\cdot\frac{|BP|}{|CP|}\cdot\frac{|CQ|}{|AQ|} = 1. \qquad (1)$$

Dokaz. Pretpostavimo da su točke P, Q i R kolinearne. Prema sinusovom poučku, uz oznake sa slike 3. vrijede sljedeće jednakosti:

$$\frac{|BP|}{|BR|} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon},$$

$$\frac{|CQ|}{|CP|} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta},$$

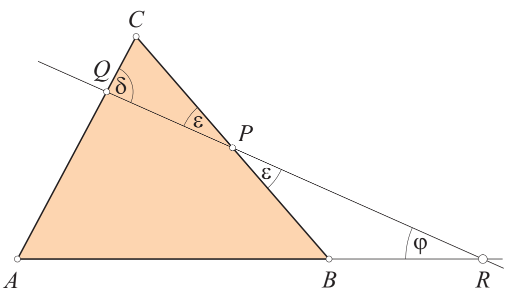
$$\frac{|AR|}{|AQ|} = \frac{\sin(\pi-\delta)}{\sin\varphi} = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}.$$

Pomnožimo li ove jednakosti, dobivamo:

$$\frac{|BP|}{|BR|}\cdot\frac{|CQ|}{|CP|}\cdot\frac{|AR|}{|AQ|} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon}\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\varphi},$$

odnosno

$$\frac{|AR|}{|BR|}\cdot\frac{|BP|}{|CP|}\cdot\frac{|CQ|}{|AQ|} = 1.$$



Sl. 3.

Cevin poučak. Neka je zadan trokut ABC i točke P, Q, R redom na pravcima BC, CA i AB. Ako pravci AP, BQ i CR prolaze istom točkom, onda vrijedi

$$\frac{|AR|}{|BR|}\cdot\frac{|BP|}{|CP|}\cdot\frac{|CQ|}{|AQ|} = 1. \qquad (2)$$

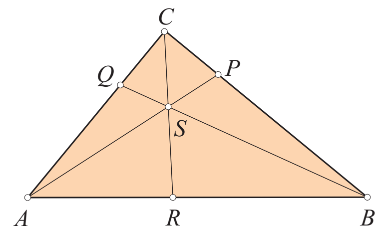
Dokaz. Označimo sa S točku u kojoj se zadani pravci sijeku. Primijenimo li Menelajev poučak na trokut ABP i pravac CS, dobivamo

$$\frac{|AR|}{|BR|}\cdot\frac{|BC|}{|PC|}\cdot\frac{|PS|}{|AS|} = 1. \qquad (3)$$

Primjenom istog poučka na trokut ACP i pravac BS, dobivamo

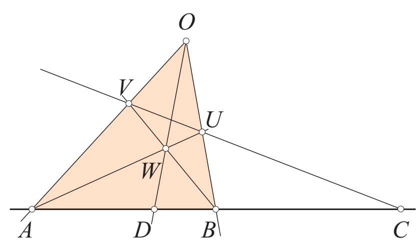
$$\frac{|CQ|}{|AQ|}\cdot\frac{|AS|}{|PS|}\cdot\frac{|PB|}{|CB|} = 1. \qquad (4)$$

Množenjem jednakosti (3) i (4) slijedi tražena jednakost (2).



Sl. 4.

Vratimo se sada našem problemu. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se točka C nalazi izvan dužine $\overline{AB}$ (slika 5.). Uzmimo proizvoljnu točku O koja ne leži na pravcu AB. Spojimo zatim tu točku sa zadanim točkama A i B. Točkom C povucimo proizvoljni pravac koji siječe oba pravca OA i OB.



Sl. 5.

Označimo te presjeke redom s V i U. Nadalje, neka je točka W presjek pravaca AU i BV. Konačno, neka je D presjek pravaca OW i AB. Tvrdimo da je D tražena točka. Dokažimo to. Iz opisane konstrukcije slijedi da se pravci AU, BV i OD sijeku u točki W pa primjenom Cevinog poučka na te pravce i trokut ABO slijedi

$$\frac{|AD|}{|BD|}\cdot\frac{|BU|}{|OU|}\cdot\frac{|OV|}{|AV|} = 1. \qquad (5)$$

Isto tako, primjenom Menelajevog poučka na trokut ABO i pravac UV slijedi

$$\frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{|BU|}{|OU|}\cdot\frac{|OV|}{|AV|} = 1. \qquad (6)$$

Iz (5) i (6) slijedi da je

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

što znači da je D zaista tražena točka.

Za točku D kažemo da je **harmonički konjugirana točki C s obzirom na par točaka** A, B, što označavamo s $H(AB, CD)$. Točku D još zovemo i **četvrta harmonička točka** za točke A, B i C.

Jasno je da ako vrijedi $H(AB, CD)$, onda vrijedi i $H(AB, DC)$, pa možemo još i reći da je par C, D harmonički konjugiran paru A, B. Četvorku točaka u takvom međusobnom odnosu zovemo *harmoničkom četvorkom točaka*.

Iz definicije harmoničke četvorke točaka slijedi da je točka D jedinstvena te da opisana konstrukcija ne ovisi o izboru točaka O, U i V. Isto tako je jasno da ako vrijedi $H(AB, CD)$, tada vrijedi i $H(AB, DC)$, $H(CD, AB)$, $H(CD, BA)$, $H(BA, CD)$, $H(BA, DC)$, $H(DC, AB)$, $H(DC, BA)$, tj. harmonitet točaka ostaje sačuvan ako radimo permutacije parova točaka te permutacije unutar istog para.

Napomena. Opisana konstrukcija je u projektivnoj geometriji zapravo definicija harmoniteta četiriju kolinearnih točkaka. Tamo spomenute tvrdnje nisu tako očigledne i dokazuju se na potpuno drukčiji način, jer u projektivnoj geometriji nema pojma udaljenosti, niti pojma kuta, ne znamo što znači *ležati između* i nema paralelnosti. U projektivnoj geometriji imamo pojam trokuta, četverokuta itd., ali nemamo pojam pravokutnog trokuta, jednakostraničnog trokuta, tupokutnog trokuta, paralelograma, kvadrata itd. Jedinstvenost četvrte harmoničke točke kao i ostale spomenute tvrdnje se u projektivnoj geometriji dokazuju uz pomoć Desarguesovog teorema. Zainteresiranog čitatelja upućujemo na [2].

Zaključak. Kako je zlatni rez samo specijalni slučaj prethodnog razmatranja, dolazimo do zaključka da postoje točno dvije različite točke koje danu dužinu dijele u omjeru zlatnog reza. Jedna od tih točaka se nalazi unutar, a druga izvan dane dužine. Ako znamo jednu od njih, tada uz pomoć opisane konstrukcije možemo naći i drugu. Najzanimljivije od svega je da to možemo ostvariti samo uz pomoć jednog ravnala.

Literatura

[1] A. Marić: *Poučci elementarne matematike*, EM 14, Element, Zagreb.

[2] D. Palman: *Projektivna geometrija*, Školska knjiga Zagreb, 1984.

PI DAY

U školama zapadnog dijela svijeta posljednjih se godina proširio običaj obilježavanja 14.3. kao **Dana broja pi** (Pi Day). Razlog tome je drukčiji zapis toga nadnevka 3.14. (March 14). Taj je dan u mnogim školama pravi matematički praznik, festival matematike. Svi su zabavljeni nekim aktivnostima vezanim uz broj *pi*.

Organiziraju se razna natjecanja: tko će zapamtiti i izrecitirati što više znamenki broja *pi*, tko će napisati najljepšu pjesmicu u čijim je riječima redom onoliko slova kolika je pojedina znamenka u zapisu famoznog broja, tko će uz pomoć džepnog kalkulatora odrediti što više znamenki broja *pi*. Objavljuje se natječaj za najljepši poster (povijest broja *pi*, broj *pi* svugdje oko nas, rekordi u određivanju znamenki broja *pi* i sl.), pokušava se eksperimentalnim putem odrediti broj *pi* (mjerenje čaša, lončića itd., Buffonova igla).

Možda i sami nakon ovoga organizirate proslavu Dana broja *pi* u vašoj školi. Zašto ne? Na Internetu je obilje materijala koji se može iskoristiti, primjerice:

`www.joyofpi.com/pilinks.html`

`http://oldweb.cecm.sfu.ca/pi/`

Sigurno će i vaši učenici iskazati svoju veliku kreativnost. Pošaljite nam fotografije sa svečanosti. Rado ćemo ih objaviti.