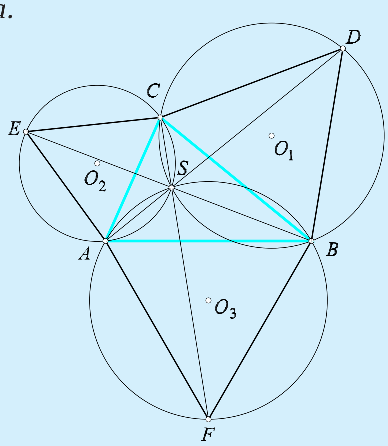
Fermatova točka

Kada je već riječ o nekim osobitim točkama trokuta, valja spomenuti i **Fermatovu točku** *(Pierre de Fermat (1601. – 1665.), francuski matematičar), koju neki ponekad zovu i Torricellijeva točka (Evangelista Torricelli (1608. – 1647.), talijanski matematičar i fizičar).*

Nad stranicama trokuta $\triangle ABC$ *konstruirani su prema van jednakostranični trokuti* $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ *i* $\triangle ACE$. *Spojnice* AD, BE *i* CF *sijeku se u jednoj točki i ta se točka zove Fermatova točka.*



Dokažimo iskazanu tvrdnju.

Opišimo kružnice jednakostraničnim trokutima $\triangle ACE$, $\triangle BCD$. *Neka se te kružnice, osim u točki* C *sijeku u točki* S.

Četverokuti $ASCE$ *i* $CSBD$ *tetivni su i upisani kružnicama, pa je* $\sphericalangle ASC = \sphericalangle CSB = 120^\circ$. *No, onda je i* $\sphericalangle BSA = 120^\circ$.

U četverokutu $AFBS$ *je* $\sphericalangle BSA + \sphericalangle AFB = 180^\circ$, *pa je taj četverokut tetivan (obrat poučka o tetivnom četverokutu).*

Dalje zaključujemo:

$$\sphericalangle CSD = \sphericalangle DSB = \sphericalangle BSF = 60^\circ,$$

jer su sve to obodni kutovi nad stranicama jednakostraničnih trokuta. Dakle i dužina $\overline{CF}$ *prolazi točkom* S.

No, uz ovaj problem moguće je dokazati i sljedeće dvije tvrdnje:
(1) $|AD| = |BE| = |CF|$.
(2) Središta triju kružnica opisanih jednakostraničnim trokutima $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ *i* $\triangle ACE$ *vrhovi su jednakostraničnog trokuta.*

Dokažimo najprije prvu tvrdnju:

Uočimo da je $\triangle ABE \cong \triangle CAF$ *(S-K-S). Naime* $|AB| = |AF|$, $|AE| = |AC|$, *te* $\sphericalangle EAB = \sphericalangle FAC = 60^\circ + \alpha$. *Slijedi* $|BE| = |CF|$.

Analogno iz $\triangle FBC \cong \triangle ABD$ *dobijemo* $|CF| = |AD|$. *Time je prva tvrdnja dokazana.*

Dokažimo sada i drugu tvrdnju:

Označimo s O_1 *središte trokuta* $\triangle CBD$, *s* O_2 *središte trokuta* $\triangle ACE$, *s* O_3 *središte trokuta* $\triangle AFB$. *Promotrimo trokut* $\triangle ACE$. *Zaključit ćemo da je* $|AC| : |CO_2| = \sqrt{3}$.

Analogno u $\triangle CBD$ *je* $|CD| : |CO_1| = \sqrt{3}$.

Dakle je $|AC| : |CO_2| = |CD| : |CO_1|$. *Ovome dodajmo:* $\sphericalangle O_2CA = \sphericalangle O_1CD = 30^\circ$ *pa je* $\sphericalangle O_2CO_1 \cong \sphericalangle ACD$.

Tako zaključujemo da je $\triangle O_2CO_1 \sim \triangle ACD$, *zbog čega je*

$$|AD| : |O_2O_1| = |CA| : |CO_2| = \sqrt{3}.$$

Na analogan se način dobije $|EB| : |O_2O_3| = \sqrt{3}$ *i* $|CF| : |O_3O_1| = \sqrt{3}$.

I tako smo dobili: $|EB| : |O_2O_3| = |CE| : |O_3O_1| = |AD| : |O_2O_1|$. *A kako je* $|EB| = |CE| = |AD|$, *(prethodno dokazana prva tvrdnja), onda je* $|O_1O_2| = |O_2O_3| = |O_3O_1|$. *Time je dokazano da je trokut* $\triangle O_1O_2O_3$ *jednakostraničan.*