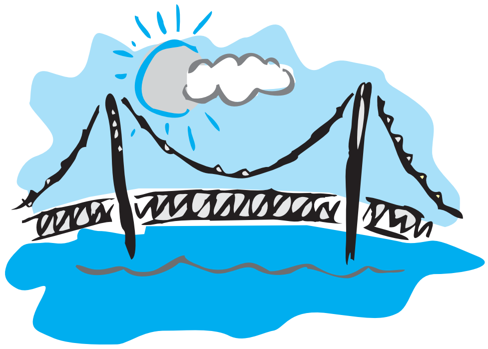
Jednadžbe čelične užadi visećih mostova

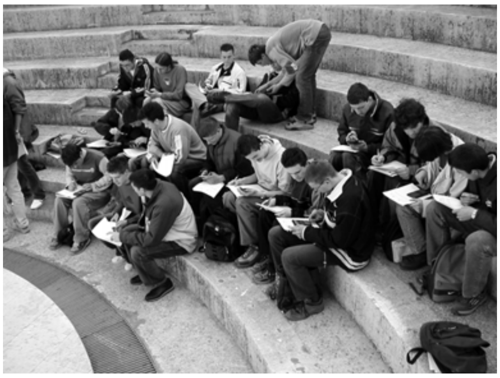


Radionica za projektni dan škole s temom mostovi

Šime Šuljić, Pazin

U posljednje vrijeme raznovrsne radionice stječu sve veću popularnost kao oblik nastave u svim predmetima u školi, na gotovo svim skupovima nastavnika, ali i općenito kao osmišljeni oblik druženja ili rada grupe učenika. Rezultati koje može polučiti takav oblik rada mogu biti impresivni, a ponekad pružaju sudionicima samo zabavu i socijalni kontakt. Ni ovo posljednje nije zanemarivo jer nam tehnološki razvoj sve više donosi mogućnost individualnog stjecanja samog znanja i mimo škole, a škola onda postaje važan faktor zadovoljenja učenikovih društvenih potreba, prije svega u odgoju za ponašanje u grupi. Međutim, radionice su svojevrsno pomodarstvo s nedovoljno osmišljenom sadržajnom stranom i često premalo razrađenom specifičnom grupnom komunikacijom. Matematika se i na ovom području ističe kao predmet s posebnim zahtjevima. Ne može se bilo kakav oblik grupne zabave svesti pod pojam matematičke radionice, ako nema specifično osmišljenog matematičkog sadržaja i individualnog angažmana učenika.

Ove je školske godine Dan škole u Gimnaziji i strukovnoj školi Jurja Dobrile u Pazinu obilježen održavanjem radionica s jedinstvenom temom mostovi za sve nastavne predmete. Predviđeno je da radionice vode učenici dragovoljci uz suradnju s predmetnim nastavnikom. Razred u kojem će se izvoditi radionica treba, s obzirom na razinu usvojenog znanja, biti u mogućnosti pratiti i aktivno sudjelovati u radionici.

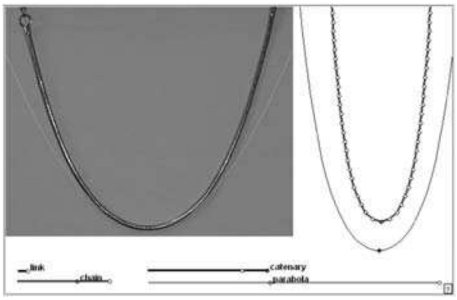


Za vođenje matematičke radionice prijavila su se trojica učenika četvrtih razreda sa željom da rade timski. Prirodno se nametnula tema matematičkog opisa razapetih kablova između stupova nosača kod visećih mostova. Ekipa koja se prihvatila vođenja radionice već je dulje vrijeme proučavala računalni program *Win-*

plot (http://`math.exeter.edu/rparris`) namijenjen crtanju i proučavanju grafova funkcija. Njihova pretpostavka je bila da je riječ o paraboli, pa bi bilo idealno da se radionica održi za drugi razred. Upozorio sam ih da nije riječ o paraboli, kako je to mislio i sam Galileo Galilei. Teška užad ili željezni lanci, ovješeni o svoje krajeve i pušteni da slobodno vise, poprimaju oblik krivulje koje se baš po lancu naziva lančanica. Kako se dođe do jednadžbe lančanice izvanredno dobro je opisao dr. Željko Hanjš u MŠ-u br. 6. Na žalost, zbog nedovoljnog poznavanja diferencijalnog računa učenicima je sam izvod bio nerazumljiv, ali su preuzeli jednadžbu lančanice

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

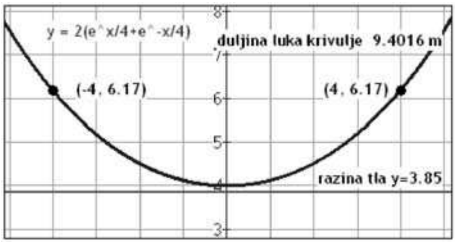
za proučavanje i uspoređivanje s parabolom na računalu.



Uputio sam ih i na jedan vrlo zanimljiv *online* eksperiment. Veliki zaljubljenik programa *The Geometer's Sketchpad*, matematičar Paul Kunkel je na svojim web stranicama (http://`www.nas.com/~kunkel/java/chain.htm`) uz fotografiju metalnog lančića ponudio dinamičnu parabolu, lančanicu i lanac. Mijenjajući parametre posjetitelj se može poigravati s danim krivuljama dok ne dobije oblik ogrlice tj. dok ju ne prekrije. Naravno, s parabolom, za razliku od lančanice ili lanca, to vam nikada neće uspjeti!

Voditelji radionice, međutim, nisu htjeli virtualni pokus, nego su pravi željezni lanac htjeli objesiti u dvorište škole. Izmjerili su prikladni prostor, raspon ovjesnih točaka i njihovu visinu nad tlom. Računalnom simulacijom mijenjajući parametar a u jednadžbi lančanice, pronašli su oblik lančanice koji se

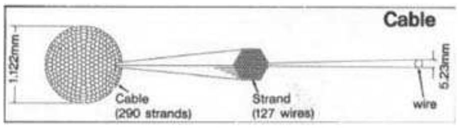
uklapa u zadani prostor. Vrijednost parametra a iznosila je 4. Kako je raspon među ovjesnim točkama iznosio 8 m, uz pomoć računalnog programa (diferencijalnim računom još nisu ovladali!) odredili su duljinu luka krivulje između točaka s apscisama -4 i 4. Lanac upravo takve duljine svojim krajevima objesili su na učvršćene vijke.



Učenici drugog razreda će najprije uz pomoć džepnog računala napraviti tablicu vrijednosti funkcije $f(x) = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)$ za zadane x-eve, a zatim će na izabranim točkama određivati udaljenost lanca od tla. Izmjerenim vrijednostima dodavat će konstantnu vrijednost razine tla nad zamišljenom osi (vidi sliku) i usporediti s tablicom dobivenom "teoretskim" putem. Cilj je uvjeriti se proračunom i mjerenjem na terenu da apstraktne i relativno složene matematičke jednadžbe opisuju prirodne oblike, odnosno nalaze veliku primjenu u izgradnji mostova.

U uvodnom dijelu sata jedan od voditelja je ispričao priču o najduljem mostu na svijetu. Riječ je o mostu *Akashi Kaikyo* koji povezuje japanske otoke Honshu i Shikoku kod grada Kobea. Most je dovršen 1998. godine i pokrenuo je raspravu o fizičkim granicama mostogradnje. Njegova je ukupna du-

ljina 3 910 metara, a raspon između stupova nosača 1 991 m, što je za čitavih 580 metara više od do tada najduljeg mosta na svijetu! Zbog tako velikog raspona i stupovi nosači su izuzetno visoki. Njihova je visina 282.80 metara. Sama čelična užad promjera 1.12 metara prelazi ukupnu težinu od 50 tisuća tona. Čelično uže napravljeno je od 127 snopova žica debljine 5.23 milimetra. Ukupna duljina tih žica je oko 300 tisuća kilometara i Zemlju bi njima opasali 7.5 puta.



Za razumijevanje jednadžbe lančanice nužno je poznavati broj e. Učenici četvrtog razreda, tj. voditelji radionice znaju da je broj e granična vrijednost niza $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Međutim, učenici drugih razreda su možda tek nešto načuli o broju e kao bazi prirodnog logaritma ili bazi eksponencijalnih funkcija koje opisuju rast bakterija ili radioaktivni raspad. Radni list za učenike stoga sadrži tablicu koju učenik treba uz pomoć džepnog računala popuniti, tj. na jednostavan i prirodan način doći do što bolje aproksimacije broja e. Učenike se zatim upućuje na činjenicu da kalkulatori imaju pohranjen broj e kao konstantu, a za izračunavanje potencija broja e dana je posebna tipka.

U sljedećem koraku učenici izračunavaju vrijednosti funkcija:

$$f(x)=e^x, \qquad f(x)=2e^{\frac{x}{4}},$$

$$f(x)=2e^{-\frac{x}{4}} \quad \text{i} \quad f(x)=2\left(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}}\right)$$

za zadane vrijednosti i unose ih u tablicu, a pomoću dobivenih vrijednosti skiciraju grafove funkcija. Funkcija $f(x)=e^x$ osnovna je među tim funkcijama i služi za povezivanje i uspoređivanje s drugim eksponencijalnim funkcijama koje su učenici već učili. Naglašava se posljednja funkcija koja je zapravo zbroj dviju prethodnih. Ističe se njezin graf i traži vizualna usporedba između skice grafa u koordinatnom sustavu na papiru i rastegnutog lanca.

Pokreće se rasprava o mjerenju koje bi trebalo provesti da se utvrdi je li sličnost između rastegnutog lanca i malog grafa na papiru stvarna. Učenici voditelji objašnjavaju da su se prilikom postavljanja lanca vodili zamišljenim koordinatnim sustavom. Tako se os x "nalazi" točno 3.85 m ispod razine tla, dok os y prolazi polovištem između ovjesnih točaka. Jedinična dužina koordinatnog sustava je jedan metar. Grupe učenika pristupaju mjerenju i rezultate unose u posljednju tablicu radnog lista. Učenici zaključuju da uz neznatna odstupanja dobivaju rezultate jako slične onima dobivenim računanjem, ali primjećuju i razliku u rezultatima mjerenja među grupama, što pripisuju subjektivnim greškama, nepreciznom alatu i posebno tomu što udaljenosti od tla nisu mjerene po idealnoj okomici. Na kraju slijedi rasprava o nekim tehničkim detaljima visećih mostova. Čak se javlja i mala nevjerica da cijela konstrukcija mosta počiva na stupovima i tim lančanicama. No, primjetno je zadovoljstvo da se nekakve apstraktne matematičke formule mogu oživotvoriti!

U uvodu je istaknuto kako se radionice sve više nameću, ali na žalost nedostaju primjeri dobrih matematičkih radionica. Možda će čitatelj uočiti teorijske ili metodičke propuste u opisu ove radionice. No, smatram da je sve pionirske ideje i korake na tom području važno zabilježiti, da bi ih netko drugi mogao nadopunjavati, usavršavati i stvarati nešto još bolje.

Jednadžbe čelične užadi visećih mostova

Za velike raspone grade se viseći mostovi. Najdulji most na svijetu je *Akashi Kaikyo* u Japanu s rasponom među nosačima od 1 991 m. Sva konstrukcija mosta visi na kablovima razapetim među stupovima. Koji oblik "zauzima" taj kabel? Oblik parabole? Ne, nego tzv. lančanice. To je oblik koji zauzima teški lanac obješen za svoje krajeve. A njegova jednadžba?

Broj e. Uz pomoć kalkulatora izračunaj sljedeće potencije u tablici:

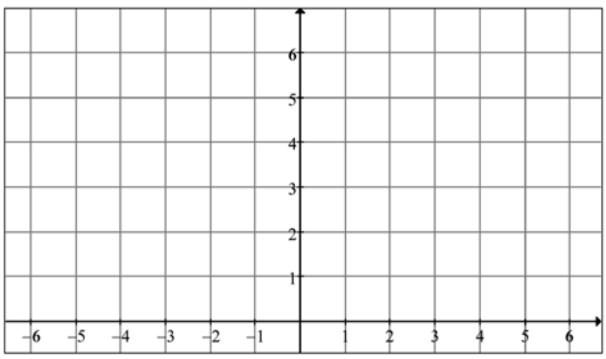
1.1^{10}	1.01^{100}	1.001^{1000}	1.0001^{10000}	1.00001^{100000}	$1.000001^{1000000}$

Kada bismo ovaj niz nastavili, dobivali bismo sve točniju vrijednost broja koji su matematičari nazvali broj e. Njegovu vrijednost s točnošću na 8 ili više decimalnih mjesta možemo dobiti tako da na kalkulatoru pritisnemo tipku e^x za vrijednost $x = 1$. Broj nalazimo u jednadžbama koje opisuju prirodni rast biljaka, bakterija, stanovništva ili radioaktivni raspad, ali i u jednadžbi lančanice.

Grafovi. Izračunaj vrijednosti funkcija za zadane x-eve pomoću kalkulatora i unesi ih u tablicu:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = e^x$									
$f(x) = 2e^{\frac{x}{4}}$									
$f(x) = 2e^{-\frac{x}{4}}$									
$f(x) = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)$									

U koordinatnom sustavu nacrtaj grafove funkcija iz tablice:



Izmjerite pojedine ordinate na "našoj" lančanici i rezultate mjerenja unesite u tablicu. Usporedite rezultate pokusa i računa.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Izmjerene ordinate (m)									
$+3.85$ m									
Razlika u donosu na vrijednosti iz gornje tablice									