Möbiusova traka

Sandra Gračan, Zagreb

Običan list papira ima dvije strane i rub. Napravite li od papira cilindar, i on će imati dvije strane i dva ruba. Puže li po papiru mrav, on će s jedne strane stići na drugu jedino ako prijeđe rub. Sfera nema ruba, ali također ima dvije strane, pa mrav može biti zatočen u njezinoj unutrašnjosti ili može puzati po njezinoj površini izvana. Možete li zamisliti plohu samo s jednom stranom i jednim rubom? Po takvoj bi plohi naš mrav mogao puzati od bilo koje točke do bilo koje druge točke, a da pritom niti jednom ne prijeđe preko ruba.

Teško je povjerovati da takva ploha postoji. Nevjerojatno je i to što nitko nije zapazio da takve plohe postoje sve dok 1858. godine August Ferdinand Möbius, njemački matematičar i astronom, nije opisao traku s jednim poluokretom. Od tada je Möbiusova traka postala najpoznatija među raznim topološkim igračkama *.

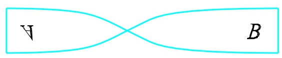
Kako je napraviti?

Sve što vam treba je komad papira, malo ljepila, škare i dobra volja. Möbiusova traka je petlja s jednim poluokretom. Sljedećih nekoliko sličica pomoći će vam u izradi.

1. Izrežite od papira dugačku traku.

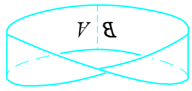
Sl. 1.

2. Zaokrenite jedan kraj trake za 180°.



Sl. 2.

3. Zalijepite krajeve.



Sl. 3.

Pokušate li olovkom nacrtati neprekidnu liniju duž ove trake, otkrit ćete kako traka ima samo jednu stranu!

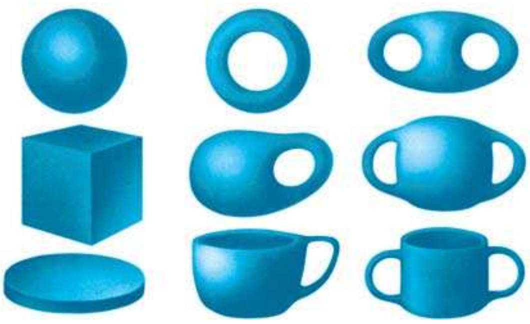
Topologija, četiri dimenzije i duhovi

Jednostranost je samo jedno od neobičnih topoloških svojstava Möbiusove trake. O stranama trake ili bilo koje dvodimenzionalne

* Traku je samo dva mjeseca ranije, neovisno o Möbiusu, otkrio i opisao još jedan njemački matematičar: J. B. Listing!

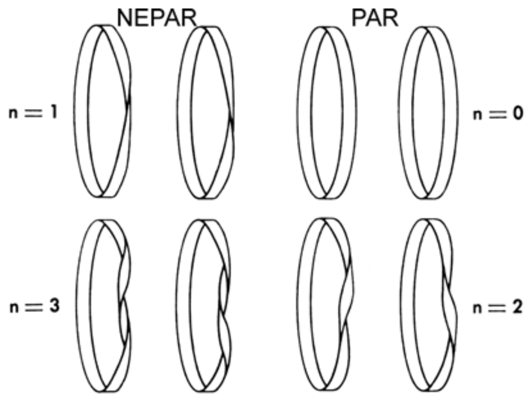
plohe možemo govoriti jedino ako je promatramo u trodimenzionalnom prostoru. (Analogno tome, kad govorimo o unutarnjem i vanjskom dijelu sfere, zapravo mislimo na prostor koji ta sfera dijeli na dva dijela, ili kad promatramo neku zatvorenu krivulju, jasno je da mislimo na krivulju koja leži u ravnini i dijeli tu ravninu na dio unutar i izvan krivulje.) Takva svojstva, usko vezana za prostor u kojem se promatrani objekt nalazi, topolozi nazivaju **vanjskim svojstvima**.

Topologija je grana moderne matematike koja proučava neprekidnost. Bavi se samo onim svojstvima neke strukture koja ostaju nepromijenjena (invarijantna) pri njezinim neprekidnim transformacijama. Zamislite da u ruci imate predmet od plastelina i da su dozvoljene sve moguće deformacije (poput gnječenja i rastezanja), osim "bušenja rupa" i kidanja dijelova pa lijepljenja na neko drugo mjesto. Što god da napravite od tog predmeta na opisani način, nova tvorevina bit će topološki identična početnoj. Tako su sa stanovišta topologije bilo koji rub kvadrata, kružnica ili elipsa potpuno jednaki, cilindar je jednak listu papira s rupom u sebi, a gumb s dvije rupice topološki je identičan šalici za kavu s dvjema ručkama.



Sl. 4. Homeomorfni objekti

Da budemo precizniji, transformacija koja čuva topološka svojstva neke strukture mora se definirati kao neprekidno preslikavanje točaka te strukture. Zato je sasvim moguće da su dvije strukture topološki jednake (homeomorfne, kako bi rekli topolozi) čak i ako u našem trodimenzionalnom prostoru od jedne ne možete napraviti drugu "deformacijama od plastelina". Jednostavan primjer su dvije zrcalno simetrične Möbiusove trake – jedna zavrnuta na lijevu, a druga na desnu stranu. One su homeomorfne. Isto vrijedi za Möbiusovu traku i bilo koju traku s 3, 5 ili više neparnih poluokreta (i njihove zrcalne slike).



Sl. 5. Trake s 1, 3, 0 i 2 poluokreta

Homeomorfne su i sve trake (i njihove zrcalne slike) s parnim brojem poluokreta, no one se ipak razlikuju od traka s neparnim brojem poluokreta (npr. po broju strana). Kad bismo Möbiusovu traku na tren umetnuli u četverodimenzionalni prostor, bilo bi moguće deformirati je i vratiti natrag u trodimenzionalni prostor kao traku s bilo kojim neparnim brojem poluokreta ili zaokrenutu na bilo koju stranu. Isto tako, traku bez okreta (topološki jednaku cilindru ili listu papira s jednom rupom) mogli bismo ubaciti u 4 dimenzije, "zasukati" i vratiti u 3 dimenzije s bilo kojim parnim brojem poluokreta i bilo kojom zaokrenutosti.

Jasno? Paaa,. . . . Možda je lakše zamišljati duhove. Zamislite da trake nemaju debljinu i da mogu prolaziti same kroz sebe. Sada je možda lakše zamisliti kako se jedna takva duh-traka, prolazeći kroz sebe mijenja u neku drugu, topološki jednaku formu. Nije li? Eh...

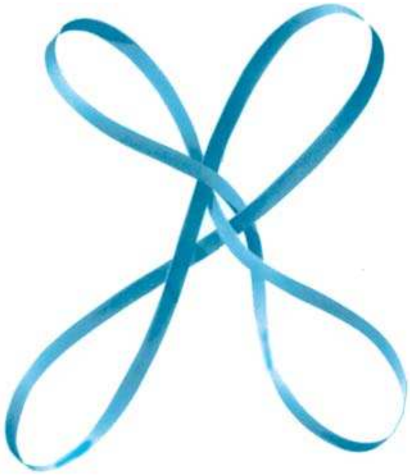
Vratimo se mi Möbiusovoj traci.

Napravite li od papirnate trake "obični" prsten, sasvim je jasno da se uzdužnim rezanjem na dva dijela dobiju dva uža prstena, oba duljine jednake duljini početnog prstena. Pokušajmo sada Möbiusovu traku razrezati uzdužno po polovici. Što mislite, dobiju li se rezanjem dvije trake?

Pomalo neočekivano i gotovo poput kakvog mađioničarskog trika, rezanjem Möbiusove trake na dva dijela dobijete užu, ali jednu jedinu traku! Međutim, ta traka sada ima dvije strane, dva ruba i dulja je dva puta od početne Möbiusove trake.

Sl. 6. Bisekcija Möbiusove trake

Razrežemo li dobivenu traku još jedanput po polovini, rezultat su dvije trake međusobno zapetljane u čvor, kao što se vidi na sljedećoj slici.



Sl. 7. Bisekcija po drugi put

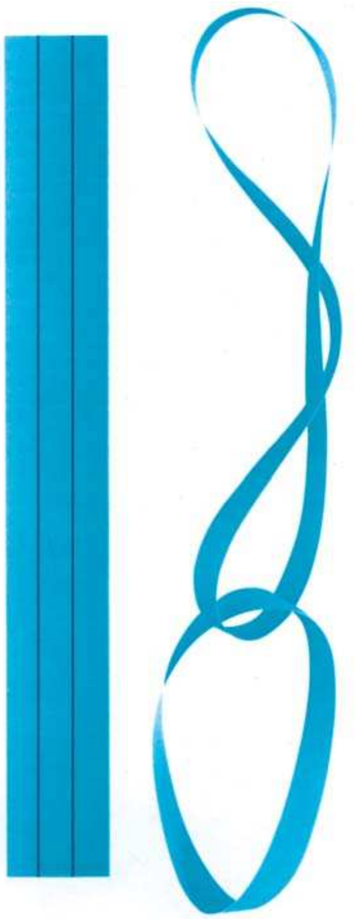
Naravno da su se matematičari sada zapitali što se događa rezanjem trake s tri, pet, sedam ili općenito neparnim brojem poluokreta. Neka je n neparan broj poluokreta koje smo načinili pri spajanju trake. Kako je model umetnut u trodimenzionalni prostor, traka će nakon rezanja imati $2n+2$ poluokreta. Za $n=1$, nova traka ima 4 poluokreta, dakle paran broj, pa je homeomorfna s cilindrom. Za $n=3$, traka nakon rezanja ima 8 poluokreta i svezana je u jednostavni čvor.

A što ako je broj poluokreta paran? Trake s parnim brojem poluokreta $(0, 2, 4, \ldots)$ nakon bisekcije uvijek daju dvije trake, identične početnoj (ali uže). U trodimenzionalnom prostoru od trake s parnih n poluokreta nakon rezanja dobivamo dvije trake opet s istih n poluokreta, koje su međusobno povezane $n/2$ puta. Tako će na primjer za $n=4$ nakon rezanja jedna traka biti dvaput omotana oko druge.

Za $n=2$ rezultat bisekcije biti će dvije trake s dvama poluokretima, međusobno spojene poput dviju karika u lancu. Rastrgamo li i bacimo jednu kariku, a drugu ponovo razrežemo na dva dijela, dobit ćemo istu stvar. Postupak bismo tako, teoretski, mogli ponavljati unedogled, što je osnovna ideja jednog starog mađioničarskog trika paranja platnenog turbana.

A želite li i vi demonstrirati ovo svojstvo i usput se poigrati mađioničara, evo još jedne ideje. Načinite veliku i široku papirnatu traku i po sredini trake povucite crtu kistom umočenim u jaku vodenu otopinu potasium nitrata. Objesite traku na prst tako da ona visi na polovini svoje širine. Kada traku pri dnu dotaknete žarom (npr. od cigarete), crta će se zapaliti i izgarati prema gore, sve dok se dva kraja ne spoje, a na prstu će nakon toga visjeti ili jedna velika ili dvije trake ili trake zapetljane u čvor, ovisno o tome je li početna traka imala jedan, dva ili tri poluokreta.

Na kraju, još jedna neobičnost! Pokušajte zamisliti što će se dogoditi prilikom trisekcije trake. Rez trebate započeti na trećini udaljenosti od jednog ruba trake. Pri rezanju ćete dvaput obići duž trake jer nakon samo jednog kruga nećete stići u početnu točku. Rezultat rezanja bit će traka jednaka početnoj, ali uža, spojena s drugom, dvaput duljom trakom, jednakom onoj koju bismo dobili bisekcijom početne trake, samo užom. Za $n = 1$, dakle kad se radi o Möbiusovoj traci, trisekcija daje malu Möbiusovu traku spojenu s dužom dvostranom trakom s 4 poluokreta.



Sl. 8. Trisekcija Möbiusove trake

A kad u ruci već imate rezultat trisekcije, pokušajte napraviti još i ovo: presložite dvije dobivene trake u trostruku Möbiusovu traku. Pritom će u sredini, kao ugniježđena, biti mala Möbiusova traka, s obje strane "okružena" duljom trakom. Neobično je to što izgleda kao da srednja Möbiusova traka cijelom dužinom razdvaja dvije vanjske trake. Isto ćete dobiti složite li zajedno tri ravne trake, primite ih kao jednu, napravite poluokret i zatim pospajate odgovarajuće rubove. Izvodite li to pred auditorijem, opet možete ispasti "faca", jer nitko neće pogoditi da ste kao rezultat dobili dvije, a ne tri trake!

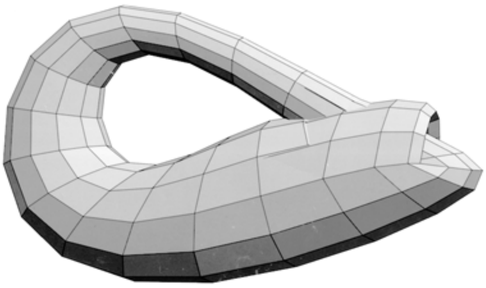
Sl. 9. Trostruka Möbiusova traka

Zanimljivo, zar ne? Figure koje se dobivaju rezanjem, nazivaju se **paradromski prstenovi**.

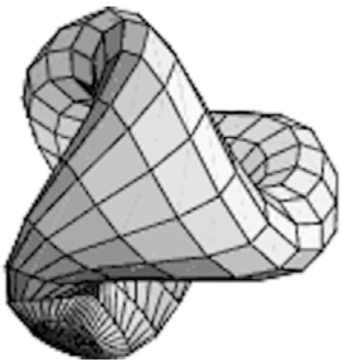
Lijeva ili desna – pitanje je sad

Möbiusova traka je **neorijentabilna** ploha. Neorijentabilnost je njezino unutarnje svojstvo. Razmišljamo li o traci isključivo kao o plohi, zanemarivši njezinu debljinu, pred nama je zapravo dvodimenzionalan prostor. Zamislite da u tom prostoru žive mala plosnata bića koja se u toj plohi mogu kretati. I zamislite jednog takvog kreaturca *xy* koji se izdvojio iz grupe svojih prijatelja i krenuo u šetnju. On će se nakon jednog kruga vratiti u društvo, ali njegova lijeva strana je postala desna i obratno. Drugim riječima, kao da se društvu pridružila njegova zrcalna slika, a ne on sam! (Upamtite – stvorenja su u plohi, a ne na njoj.)

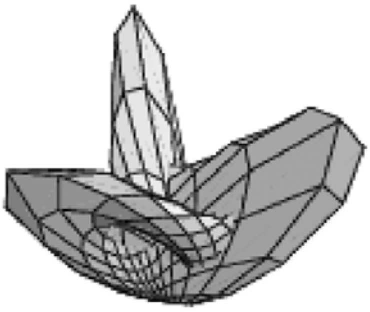
Topolozi su pronašli mnoge neobične neorijentabilne plohe. Primjeri orijentabilnih ploha su cilindar i torus, a na slici možete vidjeti tri neobične neorijentabilne plohe: Kleinovu bocu, Boyovu plohu (otkrio ju je njemački matematičar Wernrer Boy), te Rimsku plohu.



Sl. 10. Kleinova boca



Sl. 11. Boyova ploha

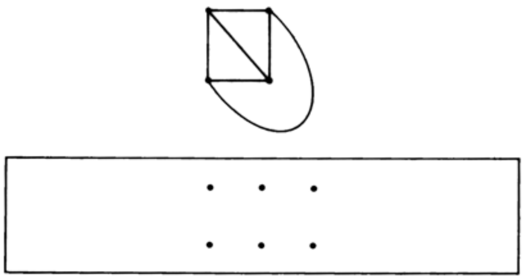


Sl. 12. Rimska ploha

Te plohe nemaju ruba i sadrže najmanje jednu Möbiusovu traku. Iz bilo koje neorijentabilne plohe uvijek se može izrezati Möbiusova traka. Tako se npr. Kleinova boca može razrezati na dvije Möbiusove trake.

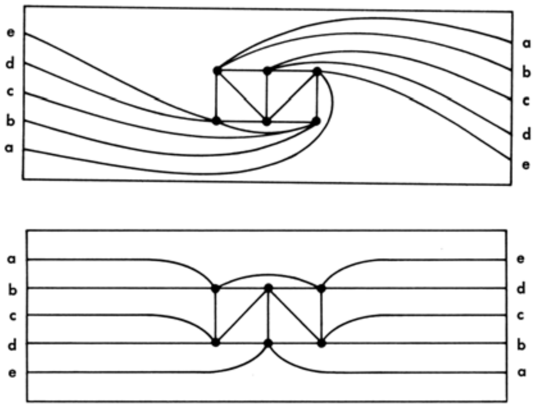
Točke i spajanje

Sljedeće interesantno svojstvo Möbiusove trake ima veze s teorijom grafova. U ravnini ili na bilo kojoj plohi s parnim brojem poluokreta, najveći broj točaka koje se međusobno mogu spojiti neprekidnim linijama tako da se te linije ne sijeku jest četiri. S pet točaka to je nemoguće.



Sl. 13. Povezivanje točaka

Na Möbiusovoj se traci čak 6 točaka može međusobno spojiti neprekidnim linijama koje se nigdje ne sijeku. Na slici pogledajte dva načina. Pritom ponovo moramo pretpostaviti da je debljina trake nula, i na linije treba misliti kao da su crtane tintom koja se upila u papir i probila na drugu stranu (ili pak radite s prozirnim trakama).



Sl. 14. Načini spajanja šest točaka bez presijecanja spojnica

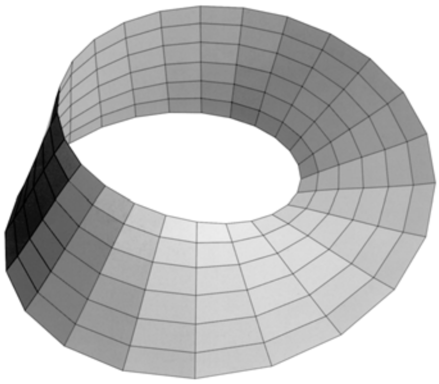
Ipak malo "prave" matematike

Evo i malo formula. Parametarske jednadžbe Möbiusove trake debljine $z = 0$, širine $2p$ i savijene u krug radijusa R, glase ovako:

$$x = \left[R + s\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right]\cos t$$
$$y = \left[R + s\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right]\sin t$$
$$z = s\sin\left(\frac{1}{2}t\right),$$

gdje je $s \in [-p, p]$ i $t \in [0, 2\pi)$.

Pitam se, pitam: može li se u Sketchpadu napraviti animacija? Pozivam sve *Sketchpad-oljupce* da pokušaju! Pomoć potražite na `http://www.cut-the-knot.com/do_you_know/moebius.shtml` i `http://astronomy.swin.edu.ay/~pbourke/surfaces/mobius/`.

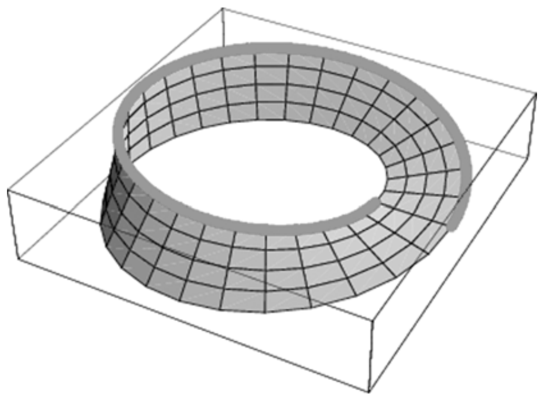


Sl. 15. Möbiusova traka

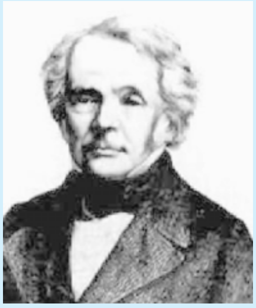
A želite li izračunati duljinu ruba (opseg) Möbiusove trake, morate integrirati kompliciranu funkciju:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ &= \Bigg[\frac{1}{16}p^4\cos^4\left(\frac{1}{2}t\right) + \bigg\{\left[R + p\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right]\cos t \\ &\qquad - \frac{1}{2}p\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\sin t\bigg\}^4 + \bigg\{R\sin t \\ &\qquad + \frac{1}{4}p\left[\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + 3\sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right]\bigg\}^4\Bigg]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

od 0 do 4π, što se na žalost ne može napraviti u zatvorenoj formi. Iako se ploha zatvara za $t = 2\pi$, rub je napravio tek pola puta — potrebno je prijeći još dodatnih 2π da se rub zatvori.



Sl. 16. Opseg trake



August Ferdinand Möbius rođen je 17. studenog 1790. g. u mjestu Schulpforta, Njemačka.

Do svoje 13. godine učio je kod kuće, a od 1803. godine pohađao je mjesnu školu. Već tada je pokazivao zanimanje za matematiku. Maturirao je 1809. godine i odlazi na studij u Leipzig. Započinje studij prava po želji svoje obitelji, no usred prve godine studija prebacuje se na studij matematike, astronomije i fizike. 1813. godine odlazi studirati astronomiju u Göttingen, k velikom astronomu i matematičaru Gaussu, tadašnjem direktoru Opservatorija u Göttingenu. Gauss zatim šalje Möbiusa na studij matematike k svom profesoru Johannu Pfaffu u Halle. 1815. godine Möbius je doktorirao i od 1816. godine postaje izvanredni profesor na Sveučilištu u Leipzigu.

No, njegovo promaknuće u redovnog profesora nije išlo tako brzo. Naime, pokazalo se da Möbius nije bio dobar predavač, što mu je prilično otežavalo život. Bio je prisiljen svoje satove davati besplatno samo da bi privukao studente. No Möbius je bio vrstan istraživač i znanstvenik i, kad 1844. godine dobiva poziv da se prebaci na Sveučilište u Jeni, njegovo Sveučilište mu konačno dodjeljuje titulu redovnog profesora.

Pored matematičkih, objavio je i niz važnih radova iz astronomije. Njegovo ime vezano je uz nekoliko važnih matematičkih objekata, kao što je Möbiusova funkcija, Möbiusova formula inverzije te Möbiusova mreža. Gotovo svi njegovi članci objavljeni su u Crelleovom časopisu, prvom časopisu koji je posvećen isključivo matematici. Zanimao se za topologiju, a u svojim memoarima otkrivenima tek nakon njegove smrti, opisivao je svojstva jednostranih ploha.

Umro je u Leipzigu 26. rujna 1868. godine.

Möbiusova traka u svakodnevnom životu

Möbiusova traka ima i svoju praktičnu primjenu. Mnogi izumi temelje se na svojstvu jednostranosti Möbiusove trake. 1923. godine Lee De Forest izumio je patent za Möbiusovu filmsku vrpcu koja snima zvuk na obje "strane". Ista ideja primjenjivala se i kod dobrih starih kazeta tako da ste muziku slušali dvostruko dulje. U tvornicama su pokretne trake spojene poput Möbiusove da bi trajale dulje. Möbiusovu traku koriste i fizičari. 1963. godine Richard L. Davis izumio je nereaktivni otpornik. Oblažući metalnu traku s obje strane nevodljivom trakom i formirajući trostruku Möbiusovu traku, Davis je otkrio da prilikom protoka elektrona kroz metal u oba smjera (elektroni prolaze sami kroz sebe), traka ima razna poželjna elektronička svojstva.

Möbiusova traka opčinila je i mnoge umjetnike. Jedna velika Möbiusova traka postavljena je na rotirajuće postolje ispred ulaza u Muzej povijesti i tehnologije u Washingtonu. Švicarski kipar Max Bill napravio je mnogo apstraktnih radova na temu Möbiusove trake. Grafičari je često koriste u svojim radovima, a postala je besmrtna zahvaljujući grafikama M. C. Eschera. 1967. godine u Brazilu je izdana marka u čast matematičkog kongresa na kojoj je bila Möbiusova traka. Traka se našla i na belgijskoj marki iz 1969. godine.

Möbiusova ploha središnja je tema i u mnogim SF pričama (npr. "Zid tmine" Arthura C. Clarka). I na internetu ćete pronaći mnogo zanimljivih stranica na temu Möbiusove trake. Stranice su bogate lijepim slikama, ima jednostavnih opisa, ali i "više" matematike. Na nekima od njih možete čak odgledati filmiće, a možete pronaći i pravila za igranje šaha na Möbiusovoj traci!!!

A za kraj jedna ideja za lijepu Božićnu čestitku: duž Möbiusove trake ispišite riječi poput: "beskrajna radost", onoliko puta koliko vam stane na traku. Primatelj će, vrteći traku, moći pročitati vašu čestitku beskonačno mnogo puta. Interesantno je da će riječi koje se čitaju uvijek dolaziti uspravne, iako su "s druge strane" slova naglavačke.

Literatura

[1] Martin Gardner, *Mathematical Magic Show*, Penguin books, London 1985., 123–136.

[2] Razne internet stranice.