Školsko natjecanje u matematici, 2003./2004.

I. razred

1. Koja je posljednja znamenka zbroja $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{33}$?

2. Ako je

$$\mathcal{I}(x,y) = \left(\frac{x+y}{x^2-xy} - \frac{2y-x}{xy-y^2}\right) : \left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right),$$

izračunaj

$$\mathcal{I}\left(\frac{1}{2}, 3\right) \cdot I\left(2, \frac{1}{3}\right).$$

3. Kolika je površina dijela ravnine koji je određen sustavom nejednadžbi $x-y+2>0$, $x-y-3<0$, $x-3<0$, $3x+2y+6>0$?

4. Ako je

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}},$$

izračunaj $f(1-\sqrt{2})$.

5. Nad stranicama trokuta $\triangle ABC$ konstruirani su polukrugovi čije su površine jednake 9π, 16π i 25π. Kolika je površina trokuta $\triangle ABC$?

II. razred

1. Izračunaj:

$$S_n = 1-2i+3i^2-4i^3+\ldots-100i^{99}+101i^{100}.$$

2. Ako je x realan broj, odredi skup svih vrijednosti funkcije

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x+1}.$$

3. Odredi realni broj b za koji su oba rješenja jednadžbe $x^2 + bx + 101 = 0$ cijeli brojevi.

4. Odredi kutove pravokutnog trokuta ako za njegove katete a i b vrijedi jednakost

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{5}{2}.$$

5. Točka D je nožište visine spuštene iz vrha A na krak $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC. Ako je $|AC| + |CD| = 2(|AB| + |BD|)$, koliki su kutovi tog trokuta?

III. razred

1. Ako za duljine stranica trokuta vrijedi $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$, odredi kut nasuprot stranice c.

2. Grafički prikaži funkciju

$$f(x) = \sin x \cdot \sqrt{\sin^2 x} - \cos x \cdot \sqrt{\cos^2 x}.$$

3. Ako je $\sin\alpha + \cos\alpha = x$, te $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = y$, izrazi y kao funkciju od x.

4. Odredi realne brojeve x i y iz sustava jednadžbi: $\log_x y + \log_y x = \frac{5}{2}$ i $x \cdot y = 4$.

5. Na stranici $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$ odabrana je točka D te su iz nje spuštene okomice na stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Nožišta tih okomica su točke M i N. Uz koji položaj točke D dužina $\overline{MN}$ ima najkraću duljinu?

IV. razred

1. Koja je posljednja znamenka zbroja $1! + 2! + 3! + \ldots + 100!$?

2. Koliko racionalnih članova ima u raspisu potencije $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^{18}$?

3. Neka je $x_1 = 1$, te $x_n = \dfrac{n}{x_{n-1}}$, za svaki $n > 1$. Izračunaj $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_{2n}$.

4. Odredi pozitivan broj x za koji su $\{x\}$, $\lfloor x \rfloor$ i x tri uzastopna člana geometrijskog niza.

Napomena: svaki se realni broj x može zapisati u obliku $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, gdje je $\lfloor x \rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od x, a $\{x\} \in [0, 1\rangle$ je "decimalni dio" broja x.

5. Odredi najveću vrijednost količnika $\dfrac{y}{x}$ ako su x i y realni brojevi koji zadovoljavaju uvjet $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$.

Rješenja

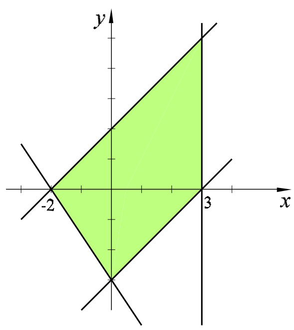
I. razred

1. Posljednje znamenke brojeva 3^n periodički se ponavljaju. Tako je posljednja znamenka broja 3^{4k+1} broj 3, posljednja znamenka od 3^{4k+2} je 9, posljednja znamenka od 3^{4k+3} je 7, a od 3^{4k} broj 1. Kad se zbroje četiri uzastopne potencije broja 3, posljednja znamenka tog zbroja je 0. U našem je zbroju 8 skupina po četiri uzastopne potencije od 3, i još k tome potencija 3^{33}. Cijelom je zbroju posljednja znamenka ista kao i toj potenciji, dakle 3.

2. $\mathcal{I}(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2 - y^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}$,

$$\mathcal{I}\left(\frac{1}{2}, 3\right) \cdot \mathcal{I}\left(2, \frac{1}{3}\right) = -\frac{36}{35^2}.$$

3. Četverokut je trapez. Njegova je površina 20.



4.

$$f(x)=\sqrt{\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2}=\left|1-\frac{1}{x+1}\right|=\left|\frac{x}{x+1}\right|.$$

$$f(1-\sqrt{2})=\left|\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}\right|$$

$$=\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Stranice trokuta imaju duljine $a=6\sqrt{2}$, $b=8\sqrt{2}$ i $c=10\sqrt{2}$. Prema obratu Pitagorina poučka taj je trokut pravokutan i njegova je površina jednaka 48.

II. razred

1. Svi članovi ove sume koji sadrže parne potencije imaginarne jedinice činit će realni dio kompleksnog broja, zbroja S_n. Ostali će pribrojnici biti imaginarni brojevi i njihov zbroj dat će imaginarni dio rezultata.

Imamo dakle: $\mathrm{Re}\,(S_n)=1+3i^2+\ldots+101i^{100}=(1-3+5-7+\ldots-99+101)=(-2)+(-2)+(-2)+\ldots(-2)+101=25\cdot(-2)+101=51.$

I dalje, $\mathrm{Im}\,(S_n)=-2+4-6+8-\ldots-98+100=2\cdot 25=50.$

Dakle, $S_n=51+50i$.

2. Treba odrediti sve a za koje je

$$\frac{x^2-1}{x^2-x+1}=a.$$

Iz ove posljednje jednakosti slijedi $(a-1)x^2-ax+a+1=0$. I sada valja riješiti problem: za koje sve realne a ova jednadžba ima realna rješenja?

Iz uvjeta $D\geq 0$ slijedi $|a|\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$, odnosno $-\frac{2}{\sqrt{3}}\leq a\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. Iz $x_1\cdot x_2=101$, jer je broj 101 prost broj, slijedi $x_1=1$, $x_2=101$ ili $x_1=-1$, $x_2=-101$.

Dakle, $b=-102$ ili $b=102$.

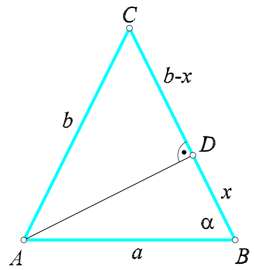
4. Iz danog uvjeta slijedi $2a^2+2b^2=5ab$. Podijelimo li tu jednakost sa b^2, dobit ćemo $2\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\cdot\frac{a}{b}+2=0$.

To je zapravo kvadratna jednadžba $\mathrm{tg}^2\,\alpha-5\,\mathrm{tg}\,\alpha+2=0$, čija su rješenja $\mathrm{tg}\,\alpha=2$ ili $\mathrm{tg}\,\alpha=0.5$.

Slijedi $\alpha=63°26'$ ili $\alpha=26°34'$. No radi se o jednom rješenju, pri čemu su ova rješenja dva šiljasta kuta trokuta.

5. Označimo $|BD|=x$, pa je $b+(b-x)=2(a+x)$. Odatle slijedi $x=\frac{2}{3}(b-a)$.

I sada imamo $\cos\alpha=\frac{x}{a}=\frac{2}{3}\cdot\frac{b-a}{a}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{b}{a}-1\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2\cos\alpha}-1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{2}{3}.$



Tako dolazimo do kvadratne jednadžbe $3\cos^2\alpha+2\cos\alpha-1=0$.

Ova jednadžba ima dva rješenja od kojih je jedno negativan broj pa otpada (kut uz osnovicu jednakokračnog trokuta ne može biti tup). Drugo je rješenje $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, te je $\alpha\approx 70°31'$.

III. razred

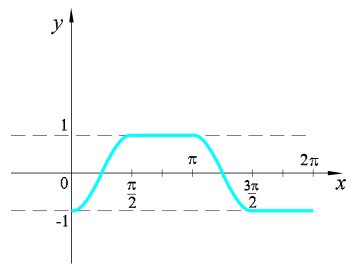
1. Iz danog uvjeta slijedi $(a+b)^2-c^2=3ab$, a odatle je $c^2=a^2+b^2-ab$.

Dakle, $2\cos\gamma=-1$. Tako je $\gamma=120°$.

2. Zapišimo funkciju na sljedeći način:

$$f(x)=\sin x\cdot|\sin x|-\cos x\cdot|\cos x|$$

$$=\begin{cases}-\cos 2x, & k\cdot 2\pi\leq x\leq(4k+1)\frac{\pi}{2}\\ 1, & (4k+1)\frac{\pi}{2}\leq x\leq(2k+1)\pi\\ \cos 2x, & (2k+1)\pi\leq x\leq(4k+3)\frac{\pi}{2}\\ -1, & (4k+3)\frac{\pi}{2}\leq x\leq k\cdot 2\pi.\end{cases}$$



3. $y=\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2 x)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot$

$\frac{1}{2} \cdot \left(-(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + 3(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\right) = x \cdot \frac{-x^2+3}{2} = \frac{x - x^3}{2}$.

4. Uvedimo zamjenu $u = \log_x y$, pa prva jednadžba dobiva oblik $2u^2 - 5u + 2 = 0$. Njezina su rješenja $u = 2$, $u = \frac{1}{2}$.

Dakle, $\log_x y = 2$, te je $y = x^2$. Nakon uvrštenja u drugu jednadžbu dobije se $x = \sqrt[3]{4}$. Zatim nalazimo $y = 2\sqrt[3]{2}$.

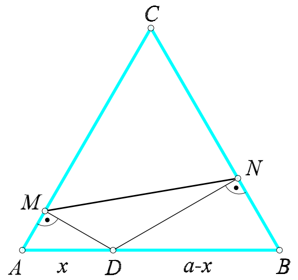
Slično postupimo i s drugim rješenjem, $u = \frac{1}{2}$, što daje simetrično rješenje za x i y.

Konačno, $x = \sqrt[3]{4}, y = 2\sqrt[3]{2}$ ili $x = 2\sqrt[3]{2}, y = \sqrt[3]{4}$.

5. Označimo $|AD| = x$, onda je $|BD| = a - x$. Tada je $|DM| = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $|DN| = \frac{(a-x)\cdot\sqrt{3}}{2}$.

Izrazimo $|MN|$ pomoću *Poučka o kosinusu*:

$$|MN|^2 = |MD|^2 + |DN|^2 - 2\cdot|MD|\cdot|DN|\cdot \cos 120^\circ = \frac{3}{4}(x^2 - ax + a^2).$$



Ova funkcija dobiva najmanju vrijednost za $x = \frac{a}{2}$. Tada je $|MN| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

IV. razred

1. Svi brojevi oblika $n!$ za $n \geq 5$ završavaju nulom. Zato je posljednja znamenka zbroja $1! + 2! + 3! + \ldots + 100!$ ujedno i posljednja znamenka zbroja $1! + 2! + 3! + 4!$, a to je 3.

2. Promatramo potencije $\sqrt[3]{3}^{18-k}$ i $\sqrt{2}^k$. Te će potencije biti cijeli brojevi ako je $k = 0; 6; 12; 18$.

U raspisu postoje 4 racionalna člana.

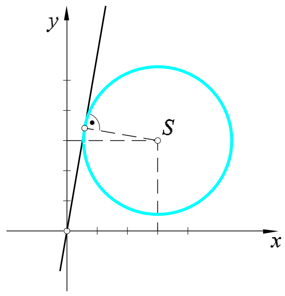
3. $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_{2n} = (x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4) \cdot (x_5 \cdot x_6) \cdots (x_{n-1} \cdot x_{2n}) == 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n \cdot n!$.

4. $\frac{\lfloor x \rfloor}{\{x\}} = \frac{x}{\lfloor x \rfloor} = \frac{\lfloor x \rfloor + \{x\}}{\lfloor x \rfloor} = 1 + \frac{\{x\}}{\lfloor x \rfloor}$.

Ako je $\lfloor x \rfloor \geq 2$, slijeva ovoj jednakosti je broj $\frac{\lfloor x \rfloor}{\{x\}}$ veći od 2, a zdesna broj manji od 2. Zato je $\lfloor x \rfloor = 1$ ($\lfloor x \rfloor \neq 0$)

Tako je, dakle $1 + \{x\} = \frac{1}{\{x\}}$, te je $\{x\} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, te onda $x = \frac{1}{\{x\}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

5. Najveća vrijednost količnika $\frac{y}{x}$ je najveća vrijednost nagiba pravca koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava i koji siječe kružnicu $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ u točki (x, y) te kružnice. Jasno je da najveći nagib ima tangenta na tu kružnicu; ona je pravac $y = kx$.



Tako dolazimo do jednadžbe $(k^2+1)x^2 - 6(k+1)x + 12 = 0$. Ona ima dvostruko rješenje kad je njezina diskriminanta jednaka nuli.

Iz $D = 0$ slijedi $k^2 - 6k + 1 = 0$. Od dvaju rješenja ove jednadžbe broj $3 + 2\sqrt{2}$ je rješenje zadatka.