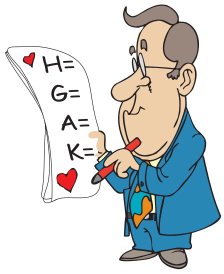
Neke zanimljivosti o temeljnim sredinama



Anđelko Marić, Sinj

Pri rješavanju zadataka, kao i pri dokazivanju nekih teorijskih tvrdnji često se, u srednjoškolskoj nastavi matematike, koristi nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine. To znači da su učenici srednjih škola uglavnom upoznati s tim sredinama. Aritmetička i geometrijska sredina, uz harmonijsku i kvadratnu sredinu, čine četiri temeljne matematičke sredine. Definirajmo svaku od tih sredina.

Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi, tada se izrazi:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}},$$
$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$
$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$
$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

zovu, redom, harmonijska, geometrijska, aritmetička i kvadratna sredina tih brojeva.

Ako je x najmanji, a X najveći od navedenih brojeva, tada vrijede nejednakosti:

$$x \leq H \leq G \leq A \leq K \leq X,$$

pri čemu, u svakoj od tih nejednakosti, vrijedi jednakost, ako i samo ako je

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Očito je, u tom slučaju, i $x = X$.

Dokazi ovih jednakosti prelaze okvir zamišljenog članka, a čitatelj ih može naći u posebnoj literaturi u kojoj se obrađuju nejednakosti.

U članku ćemo se malo šire pozabaviti nejednakostima tih sredina **dvaju** brojeva. U tom su slučaju i dokazi navedenih nejednakosti jednostavniji, pa ćemo ih i provesti.

Neka su x i y dva realna pozitivna broja i $x \leq y$, tada su pojedine sredine:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y}, \quad G = \sqrt{xy},$$
$$A = \frac{x+y}{2}, \quad K = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Vrijedi:

1) $x \leq \frac{2xy}{x+y} \Leftrightarrow x^2 + xy \leq 2xy \Leftrightarrow x^2 \leq xy \Leftrightarrow x \leq y$,

2) $\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{xy}(2\sqrt{xy}) \leq \sqrt{xy}(x+y) \Leftrightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$,

3) $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$,

4) $\dfrac{x+y}{2} \leq \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} \Leftrightarrow (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$,

5) $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} \leq y \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 2y^2 \Leftrightarrow x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow x \leq y$.

Vidimo da je svaka nejednakost svedena na nejednakost koja je očito istinita, čime su nejednakosti među temeljnim sredinama dvaju brojeva dokazane.

Lako se zapazi da, u svakoj od dokazanih nejednakosti, vrijedi jednakost ako i samo ako je $x = y$.

Sve što je do sada rečeno općenito je poznato, barem onim učenicima koji se posebno zanimaju za matematiku. U nastavku ćemo pokazati da među temeljnim sredinama vrijede neki odnosi, koji su i tim učenicima, vjerojatno, nepoznati, a do kojih je autor slučajno došao, rješavajući jedan problemski zadatak. Te ćemo odnose iskazati kao tri posebne tvrdnje, koje ćemo, naravno, i dokazati. Vidjet ćemo da su dokazi prvih dviju tvrdnji vrlo jednostavni, a dokaz (obrata) treće je nešto složeniji.

Tvrdnja 1. *Geometrijska sredina harmonijske i aritmetičke sredine dvaju pozitivnih realnih brojeva jednaka je geometrijskoj sredini tih brojeva.*

Tvrdnja se može izraziti kratkom formulom: $\sqrt{HA} = G$.

Dokaz.

$$\sqrt{HA} = \sqrt{\frac{2xy}{x+y} \cdot \frac{x+y}{2}} = \sqrt{xy} = G.$$

Tvrdnja 2. *Kvadratna sredina geometrijske i kvadratne sredine dvaju pozitivnih realnih brojeva jednaka je aritmetičkoj sredini tih brojeva.*

Ova se tvrdnja iskazuje formulom:

$$\sqrt{\frac{G^2+K^2}{2}} = A.$$

Dokaz.

$$\sqrt{\frac{G^2+K^2}{2}} = \sqrt{\frac{xy+\frac{x^2+y^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2xy+x^2+y^2}{4}} = \sqrt{\frac{(x+y)^2}{4}} = \frac{x+y}{2} = A.$$

To znači da vezu među temeljnim sredinama **dvaju** pozitivnih brojeva, koju obično pišemo

$$x \leq H \leq G \leq A \leq K \leq y,$$

možemo proširiti u

$$x \leq H \leq G = \sqrt{HA} \leq A = \sqrt{\frac{G^2+K^2}{2}} \leq K \leq y.$$

Zanimljivo je da dokazane tvrdnje ne vrijede za više od dva broja. Da te tvrdnje ne vrijede, na primjer, za tri broja, dovoljno je naći jedan protuprimjer.

Neka je $x = 1$, $y = 1$, $x = 8$, tada je:

$$H = \frac{3}{1+1+\frac{1}{8}} = \frac{24}{17},$$

$$G = \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot 8} = 2,$$

$$A = \frac{10}{3}, \quad K = \sqrt{\frac{66}{3}} = \sqrt{22};$$

$$\sqrt{HA} = \sqrt{\frac{24}{17} \cdot \frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{80}{17}} \neq G,$$

$$\sqrt{\frac{G^2+K^2}{2}} = \sqrt{\frac{4+22}{2}} = \sqrt{13} \neq A.$$

Međutim, ako to isto učinimo za $x = \dfrac{1}{3}$, $y = 2$ i $z = 12$, čeka nas malo iznenađenje. Sada je

$$H = \frac{3}{3+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}} = \frac{36}{43},$$

$$G = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 12} = 2,$$

$$A = \frac{\frac{1}{3}+2+12}{3} = \frac{43}{9},$$

$$K=\sqrt{\frac{\frac{1}{9}+4+144}{3}}=\sqrt{\frac{1333}{27}};$$

$$\sqrt{HA}=\sqrt{\frac{36}{43}\cdot\frac{43}{9}}=2=G,$$

$$\sqrt{\frac{G^2+K^2}{2}}=\sqrt{\frac{4+\frac{1333}{27}}{2}}=\sqrt{\frac{1441}{54}}\neq A.$$

Vidimo da, iako tvrdnje 1. i 2. općenito ne vrijede za tri različita broja, postoje neki brojevi za koje tvrdnja 1. vrijedi, dok za iste brojeve tvrdnja 2. ne vrijedi.

Logično je pitanje: koji odnos među tim brojevima mora postojati, da bi za njih vrijedila tvrdnja 1.? Odgovor na to pitanje daje slijedeća tvrdnja.

Tvrdnja 3. *Ako su x, y i z pozitivni realni brojevi, koji su uzastopni članovi geometrijskoj niza, tada za te brojeve vrijedi tvrdnja 1.*

Dokaz.
Zbog uvjeta tvrdnje vrijedi

$$y=xq,\quad z=xq^2;\quad x,q\in\mathbf{R}^+.$$

Pojedine sredine su:

$$H=\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{xq}+\frac{1}{xq^2}}=\frac{3xq^2}{q^2+q+1},$$

$$G=\sqrt[3]{xyz}=\sqrt[3]{x^3q^3}=xq,$$

$$A=\frac{x(1+q+q^2)}{3}$$

$$\sqrt{HA}=\sqrt{\frac{3xq^2}{q^2+q+1}\cdot\frac{x(1+q+q^2)}{3}}=\sqrt{x^2q^2}=\sqrt{xq}=G.$$

Dokažimo da vrijedi i obrat tvrdnje.

Neka za pozitivne brojeve x, y i z vrijedi

$$\sqrt{HA}=G\Leftrightarrow HA=G^2.$$

Kako je

$$H=\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{3xyz}{xy+yz+zx},$$

$$G=\sqrt[3]{xyz},\quad A=\frac{x+y+z}{3},$$

to vrijedi

$$HA=G^2\implies\frac{xyz(x+y+z)}{xy+yz+zx}=\sqrt[3]{(xyz)^2}$$
$$\implies xyz(x+y+z)^3=(xy+yz+zx)^3.$$

Posljednja jednakost, nakon kubiranja i sređivanja prelazi u

$$x^4yz+y^4zx+z^4xy-x^3y^3-y^3z^3-z^3x^3$$
$$=0\implies(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)=0.$$

(Provedeni račun, koji ovdje nije proveden, je nešto duži, a faktoriziranje zahtijeva malo spretnosti. Preporuča se čitatelju da se u to uvjeri.)

Ako je $x^2=yz$, tada su brojevi x, y i z uzastopni članovi geometrijskog niza, u tom, ili u suprotnom uređaju.

Slično zaključujemo iz $y^2=zx$ i $z^2=xy$. To znači da su brojevi x, y i z, u svakom slučaju (u šest mogućih permutacija), uzastopni članovi geometrijskog niza. Time je dokazano da vrijedi i obrat tvrdnje 3.

Sada ćemo pokazati kako se, primjenom tvrdnje 3., može jednostavno riješiti jedan zadatak.

Neka su H, G i A harmonijska, geometrijska i aritmetička sredina brojeva 2, 8 i x. Odredite x tako da geometrijska sredina brojeva H i A bude jednaka G.

Ako bismo zadatak rješavali "klasično", postupili bismo ovako:

$$H=\frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{x}}=\frac{24x}{5x+8},$$

$$G=\sqrt[3]{16x},\quad A=\frac{10+x}{3}.$$

Prema uvjetima zadatka je:

$$HA=G^2,\quad\frac{8x(10+x)}{5x+8}=\sqrt[3]{256x^2},$$

$$8^3x^3(10+x)^3=256x^2(5x+8)^3.$$

Kako je $x\neq0$, to je

$$2x(10+x)^3=(5x+8)^3.$$

Nakon sređivanja, jednadžba prelazi u:

$$2x^4-65x^3+1040x-512=0.$$

Uz malo vještine, izraz na lijevoj strani jednadžbe možemo faktorizirati, odakle ćemo dobiti rješenja:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 32, \quad x_4 = -4.$$

Budući smo temeljne sredine definirali samo za pozitivne brojeve, to posljednje rješenje otpada.

Vidimo da se ovaj postupak rješavanja zadatka svodi na rješavanje algebarske jednadžbe četvrtog stupnja, što općenito nije jednostavno i prelazi okvire srednješkolske matematike.

Pokazat ćemo kako se zadatak može jednostavno riješiti primjenom tvrdnje 3. Prema toj tvrdnji, treba odrediti x tako da on, zajedno sa zadanim brojevima 2 i 8 čini, u bilo kojem uređaju, tri uzastopna člana geometrijskog niza. Postoje tri mogućnosti:

1) x je prvi od ta tri člana, to jest ti su brojevi u uređaju x, 2, 8. Odavde se dobije $x = \frac{1}{2}$.
2) x je drugi po redu, članovi niza su 2, x, 8 i zaključujemo da je $x = 4$ ($x = -4$ otpada).
3) x je posljednji od ta tri člana, ili sada su članovi niza 2, 8, x, odakle je $x = 32$.

Lako se vidi, da bi uređaju x, 8, 2, x, 2 i 8, 2, x dali iste (ne istim redom) rezultate.

math.e

Hrvatsko matematičko društvo pokrenulo je elektronski časopis **math.e** *koji je prvenstveno namijenjen učenicima srednjih škola, te studentima matematike ili srodnih fakulteta. Glavni je urednik časopisa ugledni matematičar dr. Andrej Dujella. Planiraju se tri broja godišnje, u veljači, lipnju i listopadu. Krajem prošle godine pojavio se prvi broj koji donosi više zanimljivih priloga.*

Naš poznati i vrijedni popularizator matematike i renomirani matematičar prof. dr. Darko Žubrinić sa Fakulteta elektronike i računarstva zajedno sa svojim studentima Tvrtkom Bedekovićem i Borkom Jandrasom u članku Matrične transformacije ravnine pokušava vizualizirati neke pojmove iz linearne algebre.

Dr. Andrej Dujella napisao je prilog pod naslovom Vigenerova šifra u kojem prikazuje jednu staru metodu za šifriranje poruka.

Ivan Štedul piše o algebarskim metodama rješavanja konstruktivnih zadataka, a Emina Tihomirović bavi se poštanskim markama posvećenim matematici i matematičarima.

Prilog iz povijesti matematike dr. Ivice Gusića odgovara na pitanje zašto su uvedeni kompleksni brojevi.

Tu su još i rubrike natjecanja, matematika u literaturi i nagradni zadaci, a posebno istaknimo rubriku Linkovi s izborom matematičkih izvora na Internetu u izboru dr. Darka Žubrinića i dr. Andreja Dujelle.

U svojem pismu čitateljima MiŠ-a glavni urednik časopisa poziva ih da na elektronsku adresu mathe@math.hr jave svoje komentare, primjedbe i dojmove o prvom broju časopisa, da napišu koji im se prilozi najviše sviđaju i koje bi voljeli vidjeti u narednim brojevima, a također da sudjeluju i svojim prilozima.

Časopis math.e pogledajte na adresi `http://www.math.hr/~mathe/`