Školsko natjecanje u matematici

V. razred

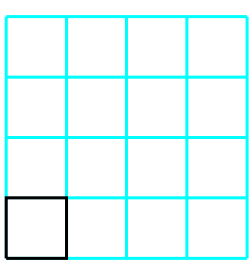
1. Neki broj ima točno osam djelitelja među kojima su brojevi 15 i 21. Koji je to broj?

2. S koliko nula završava umnožak $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 24 \cdot 25$?

3. Napiši najmanji prirodni broj djeljiv sa 36, ako se u zapisu toga broja pojavljuje svaka od znamenki 1, 2, 3, ..., 9 točno jednom.

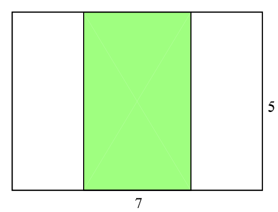
4. Na pravcu je odabrano 10 točaka. Koliko je različitih polupravaca određeno s tih 10 točaka?

5. Od 16 malih kvadrata složen je veliki kvadrat. Ako je opseg jednog malog kvadrata jednak 10 cm, koliki je opseg velikog kvadrata?



VI. razred

1. Dva sukladna kvadrata sa stranicama duljine 5 cm jednim se dijelom preklapaju i tako daju pravokutnik sa stranicama duljina 5 cm i 7 cm. Kolika je površina pravokutnika u kojem se preklapaju ti kvadrati?



2. Majci je 38 godina, kćerki 8. Za koliko će godina majka biti tri puta starija od kćeri?

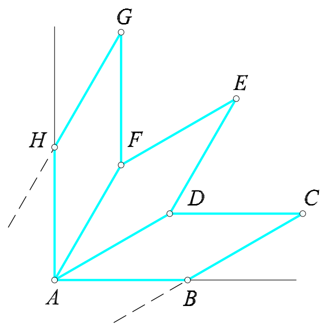
3. Možemo li 5 jabuka podijeliti ravnopravno na šestero djece ako svaku jabuku režemo najviše na tri dijela?

4. Ispiši skup svih djelitelja broja 36. Nacrtaj zatim kvadrat s devet polja te u ta polja upiši sve te djelitelje tako da umnožak brojeva u svakom pojedinom retku, stupcu te na obje dijagonale bude jednak.

5. Koliki kut zatvaraju mala i velika kazaljka sata u 8 sati i 20 minuta?

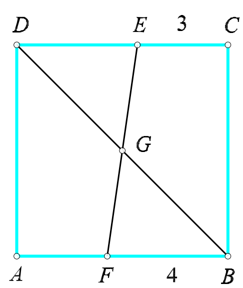
1. Dva susjedna vrha kvadrata $ABCD$ su točke $A(-2,-3)$ i $B(3,-2)$, a središte kvadrata je u ishodištu koordinatnog sustava. Odredi koordinate vrhova C i D toga kvadrata.

2. Tri sukladna romba složena su kao na slici. Ako je kut $\sphericalangle HAB$ pravi, koliki kut zatvaraju pravci GH i BC?



3. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ nalaze se točke E i F pri čemu je $|BF| = 4$ cm, $|CE| = 3$ cm. Točka G polovište je i dužine $\overline{EF}$ i dijagonale $\overline{BD}$.

Kolika je površina kvadrata $ABCD$?



4. Omjer dvaju kutova čiji je zbroj 90° je $4:5$. Uveća li se manji kut za 10%, za koliko se postotaka smanji veći, ako je zbroj i dvaju novih kutova jednak 90°?

5. Unuk, otac i djed imaju zajedno 120 godina. Koliko koji ima godina ako su im godine u omjeru $1:5:9$?

1. Izračunaj: $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.

2. Koliko znamenki ima broj $2^{10} \cdot 5^{13}$?

3. Dva su prijatelja bila u ribolovu. Kad su se vraćali kući, jedan kaže:

— *Kad bi mi dao jednu svoju ribu,imao bih dvostruko više riba od tebe.*

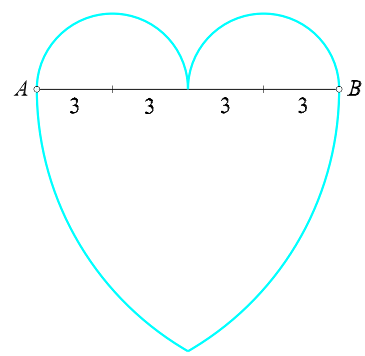
A drugi odgovori:

— *A kada bi ti meni dao jednu svoju ribu, imali bismo jednako mnogo riba.*

Koliko je riba koji upecao?

4. Kolika je površina kruga opisanog trokutu čije su stranice duge 6 cm, 10 cm i 8 cm?

5. Ako je $|AB| = 12$ cm, koliki su opseg i površina lika prikazanog na slici?



V. razred

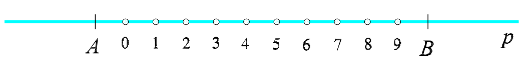
1. Kako je $15 = 3 \cdot 5$, a $21 = 3 \cdot 7$, onda su 1, 3, 5, 7, 15 i 21 djelitelji traženog broja. No njegovi djelitelji su onda još i brojevi $5 \cdot 7 = 35$ i $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Broj koji tražimo je broj 105.

2. Za nule je važno koliko je faktora djeljivih sa 5. Ukupno ih je 5. Kad se svaki od njih pomnoži parnim brojem, umnožak će završavati s 0. No broj 25 pomnožen s brojem koji je djeljiv sa 4 daje umnožak koji završava s 00, pa dani umnožak završava sa 6 nula.

3. Kako god napisali broj s tih devet znamenki, on će biti djeljiv sa 9. Naime, $1+2+3+\ldots+9 = 45$. Sad moramo paziti da dvoznamenkasti završetak tog broja bude djeljiv sa 4, a da broj bude što manji.

Konačno, rješenje je broj 123457896.

4.



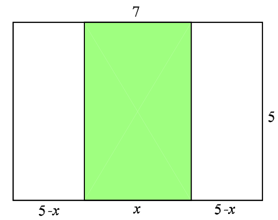
Svakom od deset točaka određena su dva polupravca. Kako imamo deset točaka, to one određuju 20 polupravaca.

5. Opseg malog kvadrata je 10 cm, duljina njegove stranice 2.5 cm. Opseg velikog kvadrata iznosi 40 cm.

VI. razred

1. *1. način:* Površina pojedinog kvadrata iznosi 25 cm^2, površina velikog pravokutnika jednaka je 35 cm^2. Onda površina P malog jednaka $P = 2 \cdot 25 - 35$, te je $P = 15$ cm^2.

2. način: Prema slici je $x + 2(5-x) = 7$, odakle je $x = 3$. Zatim je $P = 3 \cdot 5 = 15$ cm^2.



2. Iz jednadžbe $38 + x = 3(8 + x)$ dobije se $x = 7$.

3. Svako dijete treba dobiti $\frac{5}{6}$ jabuke. No $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Dakle, 3 jabuke ćemo dijeliti popola a dvije na tri dijela.

4. Djelitelji broja 36 su 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

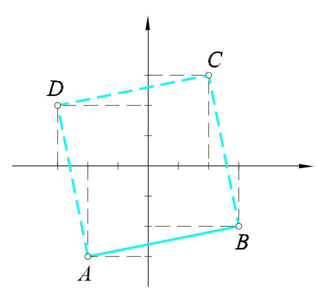
12	1	18
9	6	4
2	36	3

U prvom su retku magičnog kvadrata brojevi 12, 1, 18, u drugom 9, 6, 4 i u trećem 2, 36, 3.

5. U 8 sati i 20 minuta velika kazaljka je na broju 4, a mala se kazaljka od broja 8 pomaknula za 10°. (To je trećina od 30°). Zato kazaljke zatvaraju kut od 130°.

VII. razred

1. Može se sa slike na temelju sukladnosti zaključiti da je $C(2,3)$, $D(-3,2)$.



A može se i računati. Ishodište je polovište dužine $\overline{AC}$, pa je $x_A + x_C = 0$ i $y_A + y_C = 0$, odatle se dobije $C(2, 3)$. Na jednak se način dolazi do koordinata točke D.

2. Neka se pravci BC i GH sijeku u točki S. Promatramo četverokut $ABSH$. U njemu je (kao i u svakom četverokutu) zbroj kutova jednak 360°. No jedan je njegov kut jednak 270°, a dva su jednaka po 30°. Onda je i kut koji tražimo jednak 30°.

3. Trokuti $\triangle FBG$ i $\triangle EDG$ su sukladni prema poučku S-K-S. Prema uvjetu zadatka je $|FG| = |GE|$ i $|BG| = |GD|$ a još je i $\sphericalangle DGE \cong \sphericalangle BGF$. No onda je i $|DE| = 4$ cm i duljina stranice kvadrata iznosi 7 cm.

Površina kvadrata jednaka je 49 cm^2.

4. Jedan je kut 40°, drugi 50°. Kad se prvi poveća 10%, njegova je veličina 44°, pa veličina drugog mora biti 46°. On se umanjio za 4°, što je 8%.

5. Neka je k koeficijent proporcionalnosti. Tada je $k+5k+9k = 15k = 120$. Slijedi $k = 8$. Unuku je 8 godina, ocu 40, a djed ima 72 godine.

VIII. razred

1. $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 = \ldots = 5050$.

2. Zapisat ćemo $2^{10} \cdot 5^{13} = 2^{10} \cdot 5^{10} \cdot 5^3 = 125 \cdot 10^{10}$. Broj $2^{10} \cdot 5^{13}$ ima ukupno 13 znamenki.

3. Neka je x broj riba koje je upecao prvi, a y broj riba koje je upecao drugi ribič. Tada vrijedi: $x+1 = 2(y-1)$ i $y+1 = x-1$.

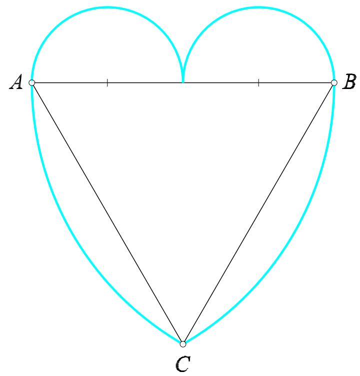
Iz ovog sustava jednadžbi slijedi $x = 7, y = 5$.

4. Prema *Obratu Pitagorina poučka* ovaj je trokut pravokutan. Po *Talesovom poučku* promjer kružnice opisane ovom trokutu je hipotenuza tog trokuta.

Zato je površina kruga jednaka 25π cm^2.

5. Opseg je jednak zbroju duljina dviju polukružnica s polumjerom duljine 3 cm i dva kružna luka sa središnjim kutom od 60° i polumjerom 12 cm.

Opseg lika jednak je 14π cm.



Površina lika je jednaka zbroju površina dvaju polukrugova, površine kružnog isječka i površine jednog kružnog odsječka.

Sve to zajedno iznosi $P = (9\pi) + (24\pi) + (24\pi - 36\sqrt{3}) = 57\pi - 36\sqrt{3} \approx 116.7$ cm^2.

* * *

ISPRAVKA:

Fibonaccijev zadatak o zečevima u prošlom broju MŠ-a (str. 26.) krivo je iskazan. Ispričavamo se čitateljima jer umjesto navedenog treba stajati:

Par zečeva okoti jednom mjesečno novi par koji je plodan tek nakon dva mjeseca. Ako na početku godine imamo jedan mladi par, koliko ćemo pari zečeva imati na kraju godine?