

Nesumjerljivost dužina

Darko Žubrinić



Cijele je brojeve stvorio dragi Bog, a sve ostalo djelo je čovjeka.

Leopold KRONECKER (1823. – 1891.)

Jedan od temeljnih matematičkih pojmova, poznat još starim Grcima u antičko vrijeme, jest sumjerljivost dužina. Za dvije zadane dužine duljina a i b kažemo da su *sumjerljive* ako postoji broj $r > 0$ tako da su a i b cjelobrojni višekratnici od r . Drugim riječima, zadane dužine mogu se “izmjeriti” pomoću duljine r , tj. $a = kr$ i $b = lr$, gdje su k i l prirodni brojevi. Sumjerljivost dužina znači da je omjer njihovih duljina racionalan broj: $a/b = k/l \in \mathbb{Q}$.

Već su stari Grci znali da postoje dužine koje nisu sumjerljive. To otkriće iz oko godine 430. prije Krista, veže se uz ime Pitagorinog učenika *Hipasa iz Metapontuma*, grada u Velikoj Grčkoj na jugu današnje Italije, koje je bilo sjedište pitagorejaca. Ono se nije uklapalo u filozofska gledanja Pitagorine škole i čuvalo se kao najstroža tajna. Navodno je Hipas o tom svojem otkriću pripovijedao izvan vrlo strogog pitagorejskog kruga, pa je za kaznu zadavljen u moru. Usput, spomenuti Hipas iz Metapontuma je navodno otkrio

i jedno od pet Platonovih tijela – dodekaedar (oplošje mu je sastavljeno od 12 pravilnih peterokuta). U literaturi se Hipasovo ime često navodi kao Hippasus iz Metapontuma.

Danas mnogi učenici srednje škole znadu da osnovica i dijagonala kvadrata nisu sumjerljive dužine. Omjer njihovih duljina je naime $\sqrt{2}$, a taj broj nije racionalan, što se lako dokazuje kontradikcijom. Prema nekim izvorima Hipas iz Metapontuma je upravo na tom primjeru otkrio postojanje iracionalnih brojeva. Drugi izvori, kao Fritz von Kurt [1], tvrde da je Hipas nesumjerljivost dužina prvi puta otkrio na primjeru dijagonale i osnovice pravilnog peterokuta.

Upravo s tim primjerom ćemo se ovdje pozabaviti. Pokazat ćemo da su dijagonala i osnovica pravilnog peterokuta doista nesumjerljive dužine. Algebarski dokaz je vrlo jednostavan, i svodi se na činjenicu da je omjer njihovih duljina jednak točno $(1 + \sqrt{5})/2$. Taj znameniti broj poznat je u arhitekturi i umjetnosti kao *božanski omjer* ili *zlatni broj*,

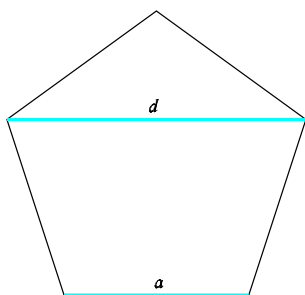


vidi [4]. Njegova iracionalnost slijedi odmah iz činjenice da je $\sqrt{5}$ iracionalan broj.

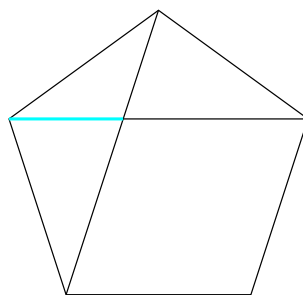
Cilj ovog članka je opisati sasvim kratak vizualni dokaz nesumjerljivosti dijagonale i osnovice pravilnog peterokuta, tj. bez uporabe ikakve algebre. Dokaz je prvi puta objavio još 1945. g. Kurt von Fritz, koji je vjerovao da je sličan geometrijski dokaz mogao poznavati i spomenuti Hipas iz Metapontuma još u 5. stoljeću prije Krista. Ovdje ćemo prikazati taj dokaz u malo dorađenom obliku, koji je godine 1999. objavio Bill Casselman u [1], pišući svoj kritički osvrt o Tufteovoj knjizi [3] posvećenoj vizualnim matematičkim dokazima. Čitajući taj zanimljiv članak bio sam zapanjen da se nesumjerljivost dužina može dobiti pukim “gledanjem”, gotovo bez napora. Neki matematičari drže da je tek otkrićem nesumjerljivih dužina prije oko dvije i pol tisuće godina započela povijest (teorijske) matematike u pravom smislu riječi.

Dokaz nesumjerljivosti dijagonale i osnovice pravilnog peterokuta provest ćemo kontradikcijom. Pretpostavimo suprotno, tj. da su te dvije dužine sumjerljive. Drugim riječima, pretpostavimo da su im duljine cjelobrojni višekratnici nekog broja $r > 0$. Cilj nam je doći do protuslovlja.

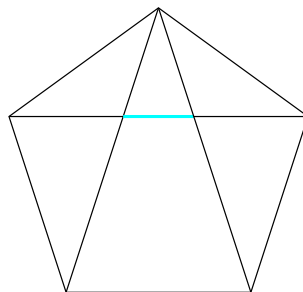
U daljnjem kraće pišemo samo “višekratnici” umjesto “cjelobrojni višekratnici”. U dokazu ćemo rabiti samo činjenicu da su dijagonala d pravilnog peterokuta i nasuprotna stranica a međusobno paralelne. Tom je činjenicom zapravo i izražena “pravilnost” peterokuta.



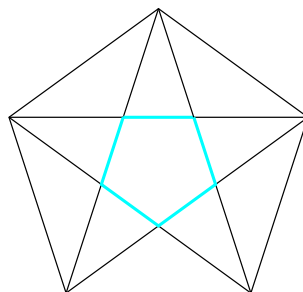
Kako su po pretpostavci duljine d i a višekratnici od $r > 0$, onda je i $d - a$ višekratnik od r .



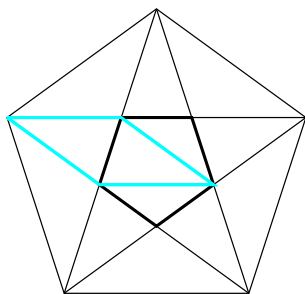
Interval na sredini dijagonale je također višekratnik od r , jer je $d - 2(d - a) = 2a - d$.



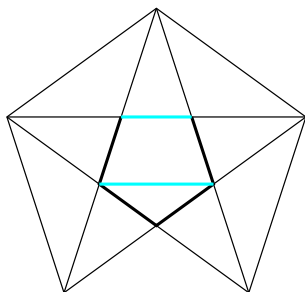
Taj interval je zapravo osnovica manjeg peterokuta koji se dobiva u središtu zvijezde nakon ucrtavanja svih dijagonala početnog peterokuta.



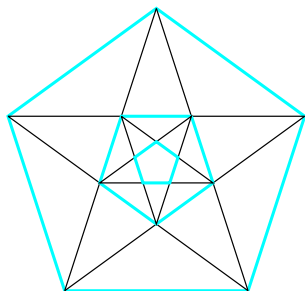
Želja nam je sada pokazati da će ne samo osnovica, nego i dijagonala manjeg peterokuta biti višekratnik od r . Istaknuti četverokut na idućoj slici je romb, jer su mu nasuprotne stranice paralelne s odgovarajućom osnovicom i dijagonalom manjeg peterokuta. Duljine stranica su jednake, jer su osnovica i desna bočna stranice dvije dijagonale manjeg peterokuta.



Kako već znamo da je gornja osnovica duljine $d - a$, to znači da je i dijagonala manjeg peterokuta višekratnik od r . Prema tome dobili smo manji peterokut čija osnovica i dijagonala su opet višekratnici od istog broja r .



S ovim peterokutom možemo nastaviti istu priču dalje. Njegove dijagonale određuju sljedeći (treći po redu) pravilni peterokut.



Duljine njegove dijagonale i stranice su opet višekratnici od r . Nastavljajući tako dalje, dolazimo nakon dovoljno mnogo koraka do vrlo malog peterokuta, čija osnovica će biti manja od r . To je međutim nemoguće, jer osnovica mora biti višekratnik od r . Ovim protuslovljem je nesumjerljivost dijagonale i osnovice pravilnog peterokuta dokazana.

Koristim prigodu izraziti zahvalnost prof. Branimiru Dakiću na sugestiji da se napiše

ovaj članak. Svim čitateljima **MS**-a želim vesele i blagoslovljene božićne blagdane.

Uz naslov članka nalazi se pentagram s likovima ptica i rozetama. Radi se o znamenitoj ploči oltarne pregrade iz krunicbene crkve kralja Zvonimira, sv. Petra u Solinu s kraja XI. st. Ugrađena je kao ograda krsnog zdenca u krstionici (Mali hram) Splitske katedrale.

Izvori

- [1] Bill Casselman, *Visual Explanations*, (prikaz o knjizi E. R. Tuftea [3]), Notices of the AMS, Volume 46, 1, str. 43–46
- [2] Kurt von Fritz, *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*, Annals of Mathematics (1945), str. 242–264
- [3] Edward R. Tufte, *Visual Explanations – Images and Quantities, Evidence and Narrative*, Graphics Press, 1997.
- [4] Darko Žubrinić, *Božanski ili zlatni omjer*, Matematičko-fizički list, XLIX, 2, str. 65–75.

* * *

KOLIKO SNIJEGA!

U Sjedinjenim Američkim Državama vode pažljivu evidenciju o najvećim visinama snijega što je pao u nekom vremenskom razdoblju. Evo trenutanih rekorda:

U jednoj godini dana, u razdoblju od lipnja 1971. do lipnja 1972. na Mount Raineru u blizini Seattlea, u državi Washington palo je 28.5 m snijega.

U Silver Lakeu u Coloradu u jednom danu (za 24 sata) 1921. godine palo je 193 cm snijega.

Najviše snijega, 991 cm, u mjesec dana palo je u Tamaracku u Californiji u siječnju 1911. godine.

