

Snježna pahuljica

Sandra Gračan, Zagreb



Baveći se gotovo svakodnevno matematikom, sigurno ste jedan od onih koje je osvojila njezina ljepota, logičnost, intelektualnost i izazovnost. Ne zaboravimo ipak da je mnogima matematika sve samo ne lijepa: sterilan svijet besmislenih suma, računa i zbunjujućih simbola. Osim toga, često i sami, udubljeni u neki matematički problem, zaboravljamo njezinu vezu sa stvarnošću. Vratimo se stoga na tren prirodi, izostavimo sve one račune, simbole i dokaze, te pogledajmo koliko matematike u sebi krije jedno malo, ali pravo čudo prirode — snježna pahuljica!



Snijeg? Brrrr..

Priznajem — ne volim snijeg. Asocijacija je to na hladnoću, bljuzgavicu, probleme s čišćenjem ulica i parkiranjem auta. No, maknete li se samo malo dalje od grada, slika prirode pod snijegom osvojiti će vas svojom ljepotom (pogotovo ako prizor možete promatrati iz tople sobe, s vatricom u kaminu ili tako nekako, he he). Gledan izdaleka, snijeg sigurno ima svoju snažnu i čistu ljepotu. No, je li vam ikada palo na pamet pogledati ga

izbliza? Jer, gledamo li ga pod povećalom, svaka pahuljica otkriva se kao pravi mali geometrijski dragulj!

I još nešto. Kažu da ne postoje dvije iste pahuljice. Kao matematičari, rekli bismo da je tvrdnja ili trivijalna ili veliko pretjerivanje. Uzmemo li u obzir samo one različitosti vidljive slabim povećalom i pomislimo li koliko je pahuljica u ovih 4 milijarde starosti Zemlje palo, sigurno se negdje, nekad pojavio neki “duplić”. Ipak, dovoljno je različitosti da u jednoj snježnoj noći nećete pronaći dvije identične pahuljice. Kako je to moguće?

Pahuljice imaju zagonetnu kombinaciju svojstava — toliko pravilnosti i matematičkih zakonitosti po kojima su složene, a s druge strane beskonačno mnogo različitosti. Pogledajmo čega tu sve ima!



Ljepota simetrije

Neke pahuljice “obični” su šesterokuti, sićušne ledene pločice sa šest ravnih stranica. Ostale su njihovi “daljnji rođaci”, mnogo zanimljivije, ljepše i otmjenije, s drvolikim grančicama složenim iz sićušnih kristala le-



da. No, koju god da promatramo, najprije će nam pažnju zaokupiti njihova simetričnost.

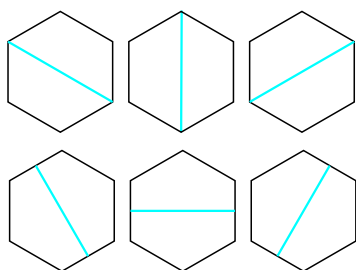


Matematičari proučavaju **transformacije** nekog objekta kao posebnu vrstu funkcija. Primjeri tih transformacija su rotacija, translacija, osna simetrija (zrcaljenje) ili centralna simetrija. Danas su one osnovni element svakog grafičkog programa — svima će biti poznate naredbe MOVE, COPY, ROTATE, SCALE, MIRROR.

Simetrija objekta je pak ona transformacija koja ostavlja taj objekt nepromijenjen (invarijantan) — on (gledan kao cjelina) izgleda jednako nakon transformacije kao i prije nje, iako su se pojedine njegove točke pomaknule. Skup svih simetrija neke figure čini **grupu**.

* * *

Ljudsko oko najlakše uočava šesterostruku rotacijsku simetriju pahuljice — rotiramo li pahuljicu za 60, 120, 180, 240 ili 300 stupnjeva, dobivamo opet istu sliku.



Ali, savršeno simetrična snježna pahuljica ima i točno šest zrcalnih simetrija. Pogledamo li onu najnezanimljiviju — pahuljicu u obliku šesterokuta, uočiti ćemo kako postoji točno šest različitih dužina koje ju dijele na dva zrcalno simetrična dijela. Sve dužine sijeku se u središtu šesterokuta, a kut između dviju susjednih dužina iznosi točno 30 stupnjeva.

Istu šesterostruku zrcalnu simetriju posjeduju i kompliciranije pahuljice. A kako kompozicija dviju osnih simetrija s različitim osima daje rotaciju za određeni kut, slijedi da je osna (zrcalna) simetrija pahuljice glavna.

Ali, zašto ne padaju peterokutne ili sedmerokutne pahuljice? I koji su to fizikalni zakoni koje priroda poštuje pri “lijepljenju” ledenih komadića u savršeno simetričnu formu šesterostrane snježne pahuljice?



Prva glavobolja

Prvi znanstvenik koji je pokušao odgovoriti na to pitanje bio je njemački astronom Johann Kepler. On je 1611. godine objavio članak *O šesterokutnoj snježnoj pahuljici* u kojem raspravlja o tome zašto pahuljice uvijek poprimaju jedinstven šesterokutni oblik. Naslutio je da to ima veze s problemom slaganja jednakih dijelova materije tako da se zauzme najmanji mogući prostor. Smatrao je da priroda stvara na optimalan način — snježne pahuljice su šesterostrane jer tako zauzmu najmanje prostora.

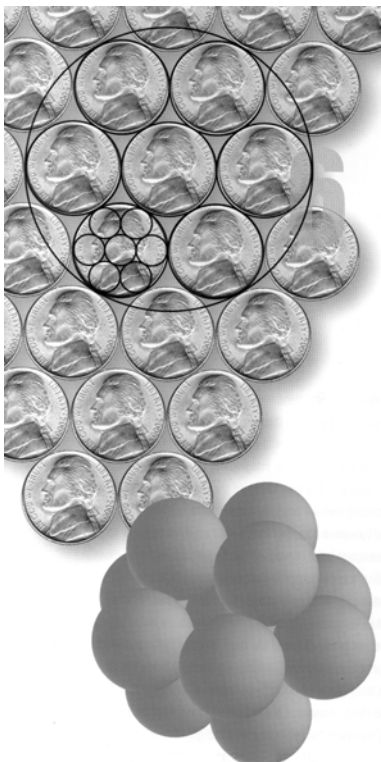
Kepler je tako pokrenuo rješavanje problema *najučinkovitijeg pakiranja*, i to krugova u ravnini a zatim i sfera u prostoru. Time je matematičarima zadao pravu višestoljetnu “glavobolju”!

Problem je djelomično riješio njemački matematičar Carl Friedrich Gauss. On je 1831. godine dokazao da je šesterokutno pakiranje krugova najučinkovitije od svih rešetkastih načina pakiranja. (Rešetka u ravnini je



skup svih točaka koje su smještene u čvorovima pravilne dvodimenzionalne mreže, bilo pravokutne, bilo kosokutne.)

I još nešto je interesantno, pokušate li krugovima “popločiti” ravninu dobit ćete uzorak pčelinjeg saća — svaki krug bit će okružen s točno šest drugih krugova. Oko njih opet možete opisati veliki krug, tri puta većeg radijusa. A u tri dimenzije, svaka sfera okružena je s točno 12 drugih. Tek nedavno, točnije 1998. godine, američki matematičar Thomas Hales uspio je dokazati da je šesterokutno pakiranje sfera u obliku piramide najučinkovitije od svih načina pakiranja. Više o tome mogli ste pročitati u članku prof. Ele Rac, *Problem pakiranja sfera*, MŠ br. 4, 2000.



Dakle, majka Priroda izabrala je šesterokutni oblik pahuljica jer je on optimalan — najmanje površine ili prostora se gubi kad se mnogo njih roji negdje u oblaku ili pada na zemlju. Jer, zavirimo li na tren u problem popločavanja površine “pločicama” u obliku pravilnih mnogokuta, odgovor na pitanje koji

I René Descartes pisao je o pahuljici. Evo što je napisao 1635. g.:

“Bile su to male pločice leda, vrlo plosnate, vrlo prozirne, oko debljine lista debljeg papira. ali tako savršeno oblikovane u šesterokute čije stranice su tako ravne, sa potpuno jednakih šest kutova, da je čovjeku nemoguće stvoriti takvu preciznost. Jedino sam imao poteškoća zamisliti što je oblikovalo šest potpuno simetričnih grančica usred zraka i pod naletima jakog vjetera, dok nisam shvatio da ih baš takve vjetar najlakše nosi u oblake i tamo zadržava, i da je svaka pahuljica u ravnini okružena se šest drugih, poštujući jednostavan zakon prirode.”

pravilni poligoni potpuno pokrivaju ravninu (tako da im se vrhovi poklapaju) glasi: jednakostranični trokuti, kvadrati, pravilni šesterokuti i ništa više!

Zašto nema drugih mogućnosti? Stvar je u tome da kutovi pri svakom vrhu moraju točno pristajati — bez “rupa” ili preklapanja. Zato kut poligona mora biti cijeli broj i djeljitelj broja 360!

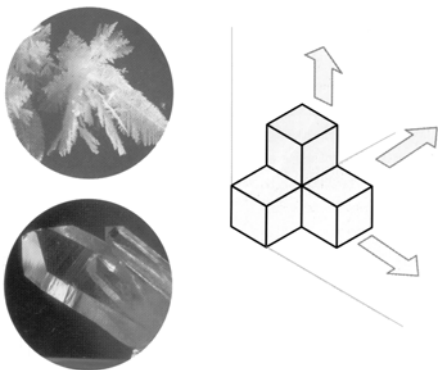


1665. Robert Hooke objavljuje knjigu "Mikrografija" koja sadrži crteže gotovo svih oblika koje je tada mogao vidjeti služeći se najnovijim izumom — mikroskopom.



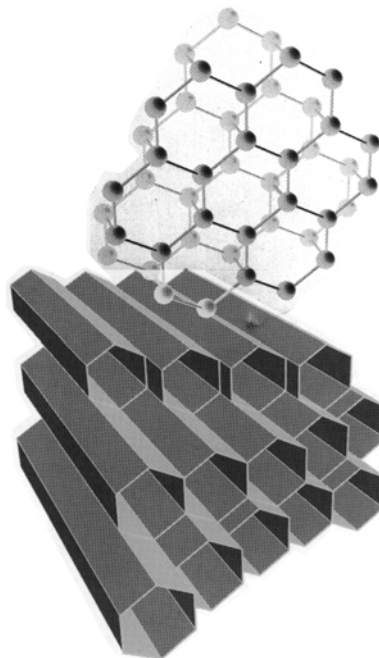
Matematika, kemija ili magija

Korak dalje bio bi zaviriti od čega je zapravo pahuljica napravljena. I sam Kepler naslućivao je kako su njezin oblik i simetrija usko vezane uz geometrijsku strukturu kristala.



Kristali općenito, krajnje su fascinirajući — pravilnih oblika, krasnih boja, tvore bizarne komplicirane likove, spajaju se u neobične forme, predivno reflektiraju svjetlost. U sebi sadrže pravilnu geometriju koja je rezultat

njihove pravilne rešetkaste atomske strukture. Kristali kuhinjske soli, na primjer, sićušne su kockice, kristali joda ljubičasto smeđi nepravilni dodekaedri, gips ima oblik dugačkih prizmi, kristal kositra svjetlucave su piramide.

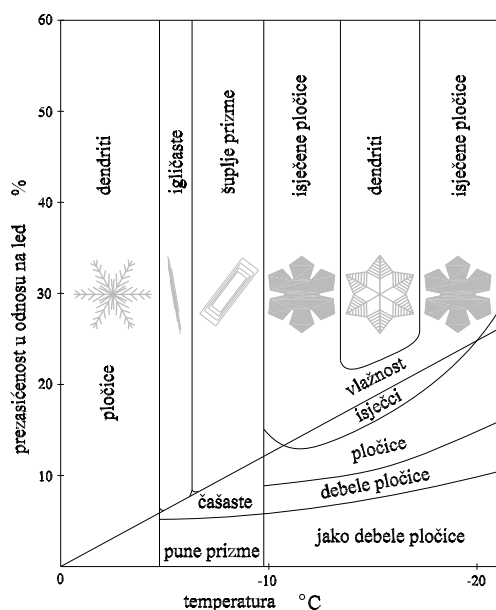


Snježna pahuljica napravljena je od leda. Molekula vode ima oblik tetraedra. Atom kisika nalazi se u središtu tetraedra, dva vrha tetraedra zauzeta su atomima vodika, a druga dva vrha su prazna (slobodna). U kristalu leda tetraedri se spajaju u šesterokutnu formu stvarajući pravilni uzorak. U tom uzorku atomi kisika "stanu" u vrhove šesterokuta, a atomi vodika nalaze se na udaljenosti od oko $1/3$ duljine stranice tog šesterokuta. Šesterokuti se pak slažu jedni na druge tvoreći tako šesterostrane prizme. One se na kraju vrlo precizno slažu u slojevima jedna na drugu i tako nastaje led, s onim svojim "skliskim" svojstvima. Gledamo li rešetku leda od naprijed, vidjet ćemo duge šesterostrane tunele poput pčelinjeg saća. Gledamo li rešetku sa strane, ti slojevi šesterostranih prizmi su gotovo plosnati.



Kaos u oblacima

Vidjeli smo kako se pahuljica sastoji od sićušnih kristalića leda, spojenih na gotovo nevjerojatne načine. Pravilna struktura rešetke uzrok je pravilne geometrije kristala, i određuje kutove pod kojim se pojedini dijelovi slažu. Geometrijske mogućnosti u prostoru daleko su veće nego u dvije dimenzije, pa ne čudi tolika raznolikost simetrija. 17 tipova simetrija 2-dimenzionalnih uzoraka prerasta u 230 tipova simetrija kod 3D kristalnih rešetki.

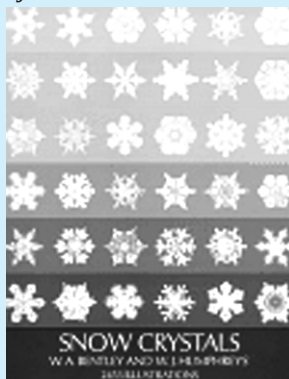


Nadalje, rešetka leda formira se pri normalnom atmosferskom tlaku i temperaturi malo ispod 0°C. Niža temperatura i veći tlak dat će drugačiju strukturu kristala. Najvažniji faktori su zapravo temperatura i prezasićenost vlagom — oni određuju generalni oblik pahuljice. Fini detalji ovise o kaotičnim uvjetima u oblacima. A kako su vremenski uvjeti u prirodi daleko od savršenih, matematički čistih situacija, zaista ne čudi tolika raznolikost snježnih pahuljica!

Wilson Bentley (1865. – 1931.), samouki američki farmer i fotograf snimio je za života oko 5000 fotografija snježnih pahuljica.



Spojivši mikroskop i foto-kameru, nakon godina pokušaja i pogrešaka, napokon je 1885. g. postao prvi čovjek koji je snimio jednu snježnu pahuljicu.



Više od 2000 fotografija objavljeno je 1931. g. u njegovoj knjizi "Snježni kristali". Neke od njih i danas plijene pažnju svojom ljepotom (vidi panoptikum).

Svakako treba naglasiti da su glavnu ulogu u proučavanju kristala odigrali matematičari. Oni se nisu brinuli o tome što su i od čega ti osnovni elementi, već su proučavali kako se oni slažu, te su tako pomaknuli nauku s mrtve točke. Bio je to izvrstan primjer primjene i važnog doprinosa čiste matematike u fizici i kemiji.



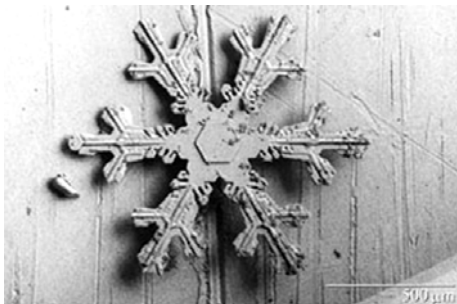
A to nije sve...

Simetrija nije jedino pravilo po kojem majka Priroda slaže stvari. Postoji još jedna, golom oku manje uočljiva vrsta pravilnosti koju posjeduju neki oblici: mali dijelovi tih objekata minijature su kopije njih samih. To svojstvo — svojstvo fraktala — pronalazimo i u malim snježnim kristalima. Svaka od šest jednakih grana pahuljice i sama se sastoji od sličnih grančica.

O fraktalima je u **MŠ**-u br. 7 pisao prof. Šime Šuljić, u članku *Čudesne slike fraktala*. U nastavku možete pročitati zgodan članak o jednoj posebnoj pahuljici, koja “pada” samo u matematičkom svijetu. Radi se o **Kochovoj pahuljici**, a članak je prenesen iz MFL-a br. 2/194, 1998.–99. A na našoj “duplerici” pročitajte kako se Kochova pahuljica može napraviti u *Geometers' Sketchpadu*

A ja bih završila s još jednom zanimljivošću. Zapravo receptom: kako uhvatiti snježnu pahuljicu i snimiti je prije nego se rastopi! Evo kako.

Sve što vam treba je akrilna boja u spreju i malo stakalce. I snijeg, naravno! U vrlo tankom sloju poprskate staklenu pločicu, postavite je tako da na nju napada nešto pahuljica (ili skinete samo jednu pahuljicu s kaputa i stavite je na pločicu), a zatim opet sve vrlo oprezno poprskate. Kad voda ispari, dobili ste mali plastični fosil snježne pahuljice!



Toliko. Tko voli, nek' izvoli. A ja odsada s povećalom u džepu čekam prvi snijeg.

Kristalografija su ulagali ogromne napore kako bi otkrili te prirodne osnovne elemente od kojih su kristali izgrađeni, no tek primjenom X-zraka u kristalografiji doći će do odgovora na postavljena pitanja.

Ukichiro Nakaya, nuklearni fizičar po struci, prva je osoba koja je napravila sistematsku studiju snježnih kristala. Dobivši posao na Hokkaidu, otoku na sjeveru Japana gdje nije bilo puno mogućnosti za nuklearna istraživanja, ali je zato bilo puno snijega, bacio se na detaljno proučavanje svih tipova smrznutih oborina. Jasno je definirao, fotografirao i katalogizirao sve glavne tipove snježnih kristala, ne samo one koji plijene svojom estetskom ljepotom i simetrijom. No, njegov pravi trijumf bilo je stvaranje umjetnih snježnih kristala u laboratoriju pod strogo kontroliranim uvjetima. Proučavajući umjetne kristale, mogao je povezati određeni oblik — morfologiju kristala s određenim okolnim (vremenskim) uvjetima. 1954. objavljena je njegova knjiga “Snježni kristali: prirodni i umjetni”, u kojoj između ostaloga kaže: “Snježni kristali su hijeroglifi poslani s neba.”

Literatura

- [1] Ian Stewart, *What Shape is a Snowflake? (Magical Numbers in Nature)*, Weidenfeld & Nicolson, London, 2001.
- [2] Keith Devlin, *Mathematics: The Science of Patterns*, Scientific American Library, New York, 1994.
- [3] <http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals/>
- [4] <http://snowflakebentley.com/>

