Mandelbrotov skup

Dodatni sadržaj uz nastavnu jedinicu Kompleksna ravnina

Šime Šuljić, Pazin

> *"Nauk čiste matematike, u oblicima u kojima se sada razvija, može polagati pravo na to da je najoriginalnija tvorevina ljudskog duha. Odmah za njom pravo na to može polagati glazba."*
> *Alfred N. Whitehead*

Imajući na umu potpunu apstraktnost matematike, pitanje "što će im (mi) to u životu trebati" uz pojedinu nastavnu jedinicu, može ponekad zvučati vrlo bogohulno. Bez obzira na primjenjivost matematičkih ideja, koja u današnjem tehničkom svijetu nisu nimalo zanemariva, mnoga su matematička otkrića vrijedna spoznavanja i divljenja sama po sebi. Unatoč tome, svi koji se bave podučavanjem matematike znaju koliko je važno i korisno učeniku ukazati na primjenu matematike i njenu povezanost s drugim granama znanosti i života.

Kada sam se prvi puta sreo s pojmom **imaginarne jedinice**, brojem koji kvadriran daje vrijednost -1, skupom svih kompleksnih brojeva i pridruživanjem tih brojeva točkama ravnine, odmah sam prihvatio tu "igru" i s velikim zadovoljstvom vršio računske operacije s kompleksnim brojevima ne mareći ni za kakvu primjenu. Najmanje sam mogao misliti da ću to moći povezati s nekakvim nezamislivo lijepim slikama. Mandelbrotov skup još nije bio ni otkriven. Danas znamo za otkriće Benoita Mandelbrota, snažna računala s monitorima visoke rezolucije u boji su svuda oko nas, predmet informatika je redovan školski predmet, a na Internetu više od sedamsto tisuća dokumenata sadrži riječ fraktal. Samo ako namjerno želimo zatvoriti oči pred božanski lijepim prizorima iz Mandelbrotovog i Julijinih skupova, nećemo povezati nastavnu cjelinu o kompleksnim brojevima s tim objektima, s Internetom, s računalima i programiranjem. Pritom je manje važno da li ćemo u stupac "Korelativne veze" upisati fraktalna geometrija, informatika i programiranje, jer će svakom nastavniku, koji je shvatio obrazac nastajanja Mandelbrotovog skupa, misli same bježati na predivne slike dočim se počne govoriti o kompleksnoj ravnini. Puno mi se čini važnijim kako učenicima pružiti kvalitetnu informaciju o tom neobveznom sadržaju. Današnji učenici su u velikoj mjeri okrenuti informatičkoj tehnologiji i Internetu pa će se s pojmom fraktal sresti prije ili kasnije, a kako je riječ o matematičkom pojmu najbolje je da se s njim sretnu u nastavi matematike.

Međutim, čisto verbalni (predavački) pristup ovoj temi nije baš prihvatljivo iz više razloga. Današnji učenici primaju mnoštvo informacija svakodnevno i prisiljeni su veći-nu informacija primiti površno i/ili odmah odbaciti. Ako informacija nije lijepo "upakirana", najvjerojatnije neće probiti učenikove "filtre". Moramo shvatiti da je definitivno prošlo vrijeme kada je ono što je učitelj rekao u školi ostalo u sjećanju kao dugo pamtljiva činjenica. Više nego ikada prije dolazi do izražaja poslovica reci mi — zaboravit ću, pokaži mi — shvatit ću, uključi me — naučit ću. Riječima je vrlo teško opisati slike Mandelbrotovog skupa. Doduše, u knjizi "Kaos — rađanje nove znanosti" Jamesa Gleicka nailazimo na krasan opis Mandelbrotovog skupa: "*Mandelbrotov skup je najsloženiji objekt u matematici, vole reći njegovo štovatelji. Vječnost nije dovoljna da ga se cijelog pregleda, njegovi diskovi načičkani su bodljikavim trnjem, njegove spirale i vlakna vijugaju uokolo i prema van, noseći mjehuraste molekule koje vise, beskrajno raznolike, kao grozdovi na Božjoj lozi. Promatran u boji, kroz podesivi prozor računalnog zaslona, Mandelbrotov skup izgleda fraktalniji od fraktala, toliko je bogata njegova složenost u raznim mjerilima. Popis različitih slika unutar njega ili numerički opis obrisa skupa zahtijevao bi beskonačno mnogo informacija. Ali, tu postoji paradoks: da bismo poslali potpuni opis skupa putem prijenosne veze, potrebno je tek nekoliko desetaka kodnih znakova. Sažeti računalni program sadrži dovoljno informacija da reproducira čitav skup. Oni koji su prvi shvatili način na koji skup miješa složenost i jednostavnost bili su zatečeni — čak i Mandelbrot.*" No, i ovakav opis dobiva svoj puni smisao tek kada se slike vide i bit shvati.

Da bismo vidjeli i istraživali Mandelbrotov skup dovoljno nam je računalo i program koji generira Mandelbrotov skup, a takvih na Internetu ima obilje i to besplatno. Međutim, iako možemo reći da su danas računala posvuda oko nas, moramo isto tako konstatirati da ih nažalost nema u matematičkim učionicama. Osim toga, na satima matematike je premalo vremena i za obvezatne sadržaje. Kako onda bez osnovnih tehničkih pretpostavki i u nedostatku vremena približiti učenicima ovu materiju koja nikog ne ostavlja ravnodušnim? Mogući izlaz nalazim u ponudi učenicima radno-informativnih listića za samostalno proučavanje i rad na računalu kod kuće ili u školi.

Predviđena su dva listića koja se ne daju istovremeno. Zbog minimalnih troškova kopiranja i jednostavnosti rada sadržaj pojedinog dijela ne prelazi format A4. Cilj prvog lista je sa slikama zaintrigirati učenika, navesti ga da upornim izračunom uz pomoć tehnike uoči razliku među brojevima koji se podvrgavaju iterativnom postupku i da posjeti ponuđene URL adrese radi provjere svojih rezultata. Posjetom ponuđenim web stranicama učenik će kroz igru, računski i grafički predočiti razliku između ograničenih i neograničenih nizova iteracija. Neobvezan cilj ovog neobveznog zadatka jest ponukati na programersko rješenje jednog matematičkog problema, ako je učenik tome vičan.

Drugi radni list predviđen je za samo one učenike, koji su riješili tablicu na prvom listu. Ako učenik nije uložio napor u uzastopno, uporno kvadriranje i zbrajanje kompleksnih brojeva, onda je upitno koliko je shvatio matematičku bit problema. K tome, učenik treba dobiti poruku da ono što se radi računalom ne mora biti samo površna zabava. Sadržajno list sadrži rezultate tablice s prethodnog lista za one učenike koji nisu imali prilike provjeriti rezultat putem Interneta. Slijedi prilično "slobodna" definicija Mandelbrotovog skupa uz pretpostavku da će pojam ograničenosti učenici intuitivno shvatiti. Potom imamo nekoliko natuknica tehničke naravi za one koji će razmišljati o procesu koji se zbiva u računalu i koji bi se mogli okušati u programiranju. Nešto URL adresa koje upućuju na programe i sadržaje o fraktalima vrlo su važne jer učenicima olakšavaju lutanje Internetom. Ujedno odabrane stranice pokazuju što rade njihovi vršnjaci. Informacija o programu *ThinkQuest* kojeg zastupa hrvatska akademska i istraživačka mreža je svojevrsna buba u uho. Taj atraktivan program bi u MiŠ-u zahtijevao opširniji prikaz, tim više što su hrvatski učenici već sudjelovali u njemu s matematičkim sadržajima. Drugi list završava s četiri slike Julijinih skupova sa zadatkom da učenik sam istraži kako se ista formula sada primjenjuje.

Može li ovakav oblik komunikacije s učenikom biti od koristi? Ovaj mali eksperiment bi kroz praksu tek trebalo provjeriti. Možda je sve lakše kroz usmenu komunikaciju, ali svjesni smo da u redovni sat matematike ne možemo ugurati još i to. Moglo bi se ovakve sadržaje dati na dodatnoj nastavi za napredne, ali bolje će se uvažiti princip pravednosti, koji kaže da se visoka očekivanja i snažna podrška trebaju odnositi na sve učenike (*Principi i standardi* NCTM-a). Osim toga dodatna nastava na mnogim školama nije ni organizirana ili je njome obuhvaćen tek mali broj učenika. Imajmo na umu i imperativ trenutka, a taj je da naši učenici moraju naučiti sami učiti. Mnogi koji su gledali slike fraktala i čitali Gleickov "Kaos" ostali su duboko zadivljeni tvrdeći da im se promijenio pogled na svijet oko sebe. Vjerujem da ne bi ostali ravnodušni ni naši učenici.

Radni listovi u izvornom formatu dostupni su za preuzimanje na stranicama mail liste *Nastava matematike*. Svaka povratna informacija mi je dragocijena.

`sime.suljic@pu.hinet.hr`

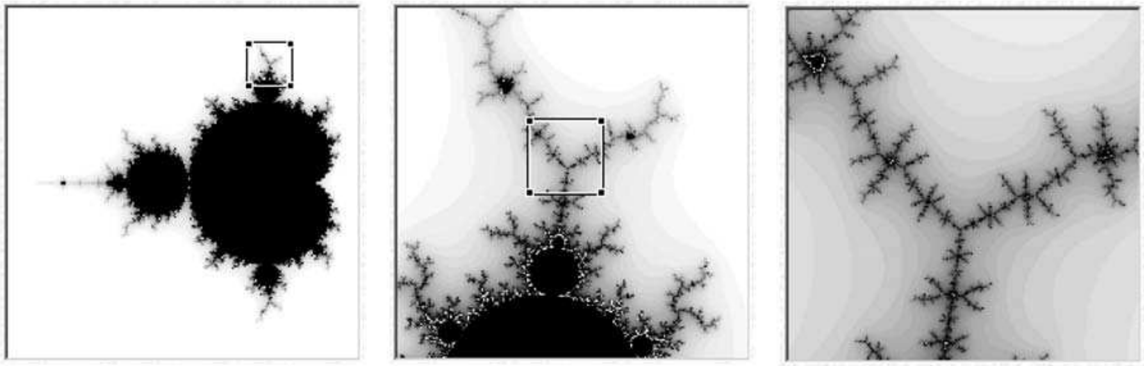
Benoit Mandelbrot,

začetnik je ideja o kaosu i fraktalima. Njegova knjiga "The Fractal Geometry" (1982) nezaobilazna je literatura za svakoga tko se želi uputiti u ovo suvremeno znanstveno područje, područje koje objedinjuje najrazličitije ideje i probleme te daje jedan novi pogled na svijet koji nas okružuje.

Mandelbrot je rođen 1924. u Varšavi. Njegova se obitelj 1936. iseljava u Francusku gdje on pod utjecajem svojeg ujaka, profesora matematike, i sam studira matematiku. Nakon završenog studija na Ecole Polytechnique odlazi u Sjedinjene Američke Države. Radi u čuvenom IBM-u, gdje uz potpunu istraživačku slobodu stvara svoje radove o fraktalima. I sama riječ "fraktal" njegov je odabir.

Danas je Mandelbrot profesor na Yaleu, jednom od najuglednijih američkih sveučilišta.

Mandelbrotov skup – 1. dio



Uvod. Prva slika u nizu predstavlja tzv. Mandelbrotov skup. Naredne slike su nastale «zumiranjem» prethodne slike. Slike su rađene računalom i «zumiranje» bi se moglo nastaviti. Slike su puno zanimljivije ako ih promatramo u boji na zaslonu računala. Upišemo li u koji internetski pretraživač pojam «Mandelbrot» dobit ćemo i više od 100 000 dokumenata s mnoštvom slika. Moguće je preuzeti i besplatne programe koji generiraju ovakve slike.

Iterativni postupak. Slike prikazuju vrlo složene i razvedene objekte i na prvi pogled bez neke prepoznatljive sheme. Znači li to da računalni programi sadrže složene algoritme koji generiraju ove objekte? Ne! Uopće ne. Jer iza svega stoji matematika. Preciznije kompleksni brojevi i kompleksna ravnina. Znamo računati s kompleksnim brojevima i prikazivati ih u kompleksnoj ravnini. Točke zaslona računala možemo promatrati kao točke (brojeve) kompleksne ravnine. Svaki broj c, koji odgovara ispitivanoj točki, podvrgnemo sljedećem tzv. iterativnom postupku:

$$z_1 = z_0^2 + c, \quad z_2 = z_1^2 + c, \quad z_3 = z_2^2 + c, \ \ldots, \ z_n = z_{n-1}^2 + c$$

gdje je početni broj $z_0 = 0$. Dakle uzmemo 0 pomnožimo samu sa sobom i dodamo broj c, zatim rezultat kvadriramo i dodamo broj c, rezultat ponovo kvadriramo i dodamo početni broj c itd.

Primjer. Neka je $c = -0.5 + i$, tada je i $z_1 = -0.5 + i$, $z_2 = (-0.5 + i)^2 - 0.5 + i = -1.25$ i dalje je $z_3 = (-1.25)^2 - 0.5 + i = 1.0625 + i, \ldots$

Zadatak. U osnovi svi kompleksni brojevi koje podvrgavamo opisanom postupku ponašaju se dvojako. Da bismo shvatili tu razliku, podvrgnimo danom postupku brojeve zadane u donjoj tablici. Rezultate bilježi u danu tablicu.

c	$-0.3 + 0.4i$	$0.5 + i$
z_1		
z_2		
z_3		
z_4		
z_5		
z_6		
z_7		
z_8		
z_9		

Napomena. Služi se džepnim računalom za izračun. Ukoliko si sklon programiranju pokušaj problem riješiti u nekom od programskih jezika. Točnost izračuna možeš provjeriti posjetom web stranici s adresom http://free-pu.hinet.hr/SimeSuljic/iter.htm, gdje je sam program pisan u *Javascriptu.* Klikom na Wiew-Source može se vidjeti programski kod. Iterativnom postupku možeš podvrći i neke druge brojeve. Posebno je zanimljivo ako sve brojeve $z_1, z_2, z_3, \ldots$ prikaže kao točke kompleksne ravnine i poveže dužinama. U interaktivnom apletu na adresi http://free-pu.hinet.hr/SimeSuljic/itergsp.htm možeš «šetati» točku c po kompleksnoj ravnini. Pritom prateće dužine stvaraju vrlo zanimljive oblike.

Mandelbrotov skup – 2. dio

Provjera rezultata. Ako si pažljivo proveo iterativni postupak za zadane brojeva, trebao si dobiti u posljednjem retku lijevog stupca $z_9 = -0.28763 + 0.24059i$, a u desnom stupcu $z_9 = 5.38 \times 10^{69} - 6.9 \times 10^{69} i$. Razlika je očita. Nakon devet koraka prvi je broj po apsolutnoj vrijednosti ostao mali, dok je drugi po apsolutnoj vrijednosti velik i ako se postupak nastavi očito će «odlutati» u beskonačnost. Za točku kompleksne ravnine, koja je pridružena prvom broju, kažemo da pripada Mandelbrotovom skupu, dok mu druga točka ne pripada.

Definicija. Mandelbrotov skup je skup točaka kompleksne ravnine za koje niz iteracija u opisanom postupku ostaje ograničen. Točke koje pripadaju skupu se najčešće crtaju crnom bojom.

Tehnička pitanja. Sada se odmah javlja jedan tehnički problem. Do kada ćemo pustiti računalo da vrši zadane iteracije ne bi li zaključio da točka pripada ili ne pripada Mandelbrotovom skupu? Otkriveno je da dočim neka iteracija po apsolutnoj vrijednosti prijeđe vrijednost 2, ispitivana točka ne pripada skupu, pa se ni ne crta kao točka skupa, a ispitivanje se prekida i prelazi na narednu točku. Strogi matematički pristup ovom problemu može se naći u *Matematičko fizičkom listu* br. 2/XLV. Ali ako ni nakon zadanog broja n iteracija, $|z_n|$ je i dalje manji od 2 računalo ispitivani broj crta kao točku skupa, iako je moguće da ta točka stvarno nije u skupu. Poveća li se broj iteracija dobiva se preciznija slika, ali se gubi na vremenu koje je računalu potrebno za izračun. Točki koja u određenom koraku iteracije prijeđe modulom vrijednost 2 može se dodijeliti i određena boja. Na taj način nastaje vrlo impresivna okolina Mandelbrotovog skupa.

Pisanje programa. Mada je na Internetu dostupan veliki broj programa za crtanje Mandelbrotovog skupa, pisanje vlastitog programa može biti izazov za sve one koji poznaju osnove programiranja. Dijagram tijeka programa za crtanje skupa i primjer programa pisanog u Qbasicu nalazi su u već spomenutom *Matematičko fizičkom listu*. (Napomena: tamo iza 19. retka $y=0$ programa nedostaje redak $r=x*x+y*y$.)

Gotovi programi. Legenda među programima je *Fractint* (http://spanky.triumf.ca). Moja preporuka je *Fractal Explorer*, program ugodnog sučelja, koji okuplja mnoge poklonike. Na lijepo oblikovanim web stranicama http://www.eclectasy.com/Fractal-Explorer/ su bogate galerije slika i pozadinskih slika, mail lista korisnika i naravno program s uputama. Za one koji žele znati više o fraktalima i fizici kaosa izvanredan je nešto skromniji program *Winfeed* (http://math.exeter.edu/rparris/).

Sadržaji o fraktalima. Sadržaji na Internetu. Kriterij izbora nije samo kvaliteta radova već i to što su sami autori vrlo mladi ljudi tj. učenici. Preporuka:

- Maturalni rad s temom "*Deterministički kaos*" učenika Ivana Nakića iz gimnazije Jurja Barakovića iz Zadra, šk.god. 1999./2000. http://www.inet.hr/~ivnakic/kaos/index.htm
- *Fraktali i teorija kaosa*, http://www.hupi.hr/tino/mandel.htm
- *Fantastic Fractals,* http://library.thinkquest.org/12740/netscape/index.html
- *Fractals Unleashed*, http://library.thinkquest.org/26242/full/index.html

Posljednja dva naslova su stranice velikog svjetskog programa *ThinkQuest* namijenjenog poticanju učenika i učitelja na timsku izradu obrazovnih web stranica. Zastupnik tog programa u Hrvatskoj je CARNet (http://www.carnet.hr). Nagrade su im vrlo privlačne, čak po 5000 $! ☺

Tiskana izdanja**.** *Matematičko fizičko list,* godišta 92./93., 94./95., 95./96 i svakako valja pročitati jednu od najboljih popularno znanstvenih knjiga prevedenih na hrvatski jezik *KAOS - rađanje nove znanosti* Jamesa Gleicka u izdanju Izvora.

Zadatak 1. Upustiš li se u ovaj fantastičan svijet fraktalnih slika, molim te, da ispišeš štogod i za matematičku učionicu.

Zadatak 2. Pogledaj donje slike. Ne radi se o Mandelbrotovom skupu, već o Julijinim skupovima. Mandelbrot je došao do svog otkrića 1979. godine, kada je htio napraviti kolekciju Julijinih skupova na računalu, koje su francuski matematičari Gaston Julia i Pierre Fatou izmislili i proučavali puno prije računala! Postoji mala razlika u primjeni formule $z_n = z_{n-1}^2 + c$. Pokušaj uz pomoć literature otkriti u čemu je ta razlika.