

Neki poučci o trokutu

Andelko Marić, Sinj



U članku ćemo pokušati neke jednostavne činjenice o trokutu izraziti pomoću vektora, ili točnije, neke ćemo poučke o trokutu iskazati u vektorskom obliku. Na kraju ćemo, pomoću tih poučaka, dokazati neke poučke, koji se najčešće drugačije dokazuju.

Da bi se moglo pratiti tekst, nužno je, uz osnovne pojmove o trokutu, poznavati i temeljne pojmove vektorskog računa (pojam suprotnog i nulvektora, zbrajanje i skalarno množenje vektora i slično).

U cijelom ćemo tekstu rabiti stalne oznake: vrhove trokuta označavat ćemo s A , B i C ; polovišta stranica trokuta s P , Q i R ; težište, ortocentar i središte trokutu opisane kružnice s T , H i S . U nekim slučajevima pojavit će se i još neke oznake, što će biti posebno naznačeno. D.1., D.2., ..., P.1., P.2., ... znače definicije, odnosno poučke, što se neće uvijek posebno naglašavati.

D.1. U trokutu ABC vektore $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ i $\vec{CA}$ zvat ćemo **vektorima stranica** tog trokuta.

P.1. Zbroj vektora stranica bilo kojeg trokuta jest nulvektor.

Dokaz. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} &= (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CA} \\ &= \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Vrijedi i obrat tog poučka, što se iskazuje kao

P.2. Ako za nekolinearne vektore $\vec{x}$, $\vec{y}$ i $\vec{z}$ vrijedi $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0}$, tada su ti vektori vektori stranica nekog trokuta.

Dokaz. Rubne točke vektora $\vec{x}$ označimo s A i B , to jest $\vec{x} = \vec{AB}$. Vektor $\vec{y}$ dovedimo s početkom u točku B , tada njegov završetak padne u neku točku C , to jest $\vec{y} = \vec{BC}$. Budući da je $\vec{x} + \vec{y} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$, to je $\vec{AC} + \vec{z} = \vec{0}$, ili $\vec{z} = \vec{CA}$. A to znači da su $\vec{x}$, $\vec{y}$ i $\vec{z}$ vektori stranica trokuta ABC .

P.3. Vektor kojemu su rubne točke polovišta stranica trokuta jednak je polovici vektora treće stranice tog trokuta. (Poučak o srednjici trokuta)

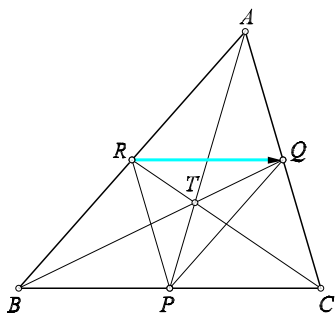
Dokaz. Treba, uz oznake kao na sl. 1., dokazati da je $2\vec{RQ} = \vec{BC}$, $2\vec{QP} = \vec{AB}$, $2\vec{PR} = \vec{CA}$.



Vrijedi

$$\begin{aligned} 2\vec{RQ} &= 2(\vec{RA} + \vec{AQ}) = 2\left(\frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC}\right) \\ &= \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}. \end{aligned}$$

Isto se tako dokazuje i za ine dvije srednjice.



Slika 1.

D.2. Ako su točke P , Q i R polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC , vektore $\vec{AP}$, $\vec{BQ}$ i $\vec{CR}$ zvat ćemo **vektorima težišnica** trokuta ABC .

P.4. Zbroj vektora težišnica trokuta jest nulvektor.

Dokaz.

$$\begin{aligned} \vec{AP} + \vec{BQ} + \vec{CR} &= \vec{AB} + \vec{BP} + \vec{BC} + \vec{CQ} + \vec{CA} + \vec{AR} \\ &= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}) \\ &= \frac{3}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = (\text{P.1}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

P.5. Za svaki trokut $\triangle_1$, postoji trokut $\triangle_2$ takav da su vektori stranica trokuta $\triangle_2$ vektori težišnica trokuta $\triangle_1$.

Dokaz. Tvrdnja poučka slijedi neposredno iz P.4. i P.2.

P.6. Ako je T težište trokuta ABC , tada vrijedi $\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} = \vec{0}$.

Dokaz. Prema poučku o težištu trokuta vrijedi:

$$\vec{TA} = \frac{2}{3}\vec{PA}, \quad \vec{TB} = \frac{2}{3}\vec{QB}, \quad \vec{TC} = \frac{2}{3}\vec{RC},$$

a oдавde je

$$\begin{aligned} \vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} &= -\frac{2}{3}(\vec{AP} + \vec{BQ} + \vec{CR}) \\ &= (\text{prema P.4.}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

P.7. Ako je O bilo koja točka ravnine, a T težište trokuta ABC , tada vrijedi $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OT}$.

Dokaz.

$$\begin{aligned} \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} &= \vec{OT} + \vec{TA} + \vec{OT} + \vec{TB} + \vec{OT} + \vec{TC} \\ &= 3\vec{OT} + (\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC}) \\ &= 3\vec{OT}, \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili tvrdnju P.6.

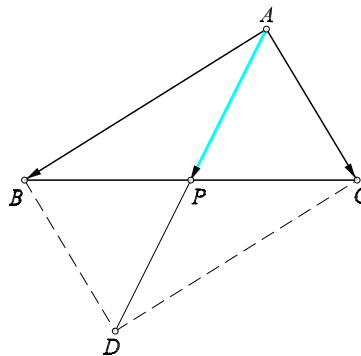
P.8. Vektor težišnice s početkom u jednom vrhu trokuta jednak je poluzbroju dvaju vektora s počecima u tom vrhu i završetcima u inim dvama vrhovima trokuta.

Dokaz. Težišnicu $\vec{AP}$ trokuta ABC produžimo preko P do točke D , tako da je $|PD| = |AP|$, kao na sl. 2. Četverokut $ABDC$ je paralelogram, jer mu se dijagonale rasplavljaju.

Zato je $\vec{BD} = \vec{AC}$, a zbog toga

$$2\vec{AP} = \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \vec{AC},$$

ili $\vec{AP} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$, što je tvrdnja poučka. Na isti se način to dokaže i za ine dvije težišnice.



Slika 2.



D.3. Trokut kojemu su vrhovi polovišta stranica zadanog trokuta zove se **polovišni trokut** tog trokuta.

P.9. Težište polovišnog trokuta podudara se s težištem polaznog trokuta.

Dokaz. Ako su P, Q i R polovišta stranica trokuta ABC , a O bilo koja točka ravnine, dovoljno je, prema P.7., dokazati da vrijedi $\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

Vrijedi:

$$\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BP},$$

$$\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP} \implies 2\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{OC},$$

jer je

$$\vec{BP} + \vec{CP} = \vec{0}.$$

Isto je tako

$$2\vec{OQ} = \vec{OC} + \vec{OA},$$

$$2\vec{OR} = \vec{OA} + \vec{OB}.$$

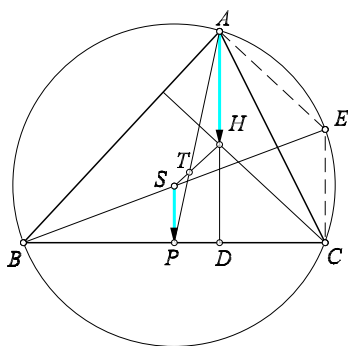
Oдавde je

$$2(\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR}) = 2(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}),$$

što je ekvivalentno tvrdnji poučka.

P.10. Ako su u trokutu ABC točke P, Q i R polovišta stranica, H ortocentar, a S središte trokutu opisane kružnice, tada vrijedi: $\vec{AH} = 2\vec{SP}, \vec{BH} = 2\vec{SQ}, \vec{CH} = 2\vec{SR}$.

Dokaz. Neka je E druga rubna točka promjera $\overline{BE}$ kružnice opisane trokutu ABC , kao na sl. 3, tada je $\sphericalangle BCE = \sphericalangle EAB = 90^\circ$ (Talesov poučak).



Slika 3.

Kako je $\overline{CH} \perp \overline{AB}$, to je $\overline{CH} \parallel \overline{EA}$. Iz istoga je razloga $\overline{AH} \parallel \overline{EC}$, što je dovoljno da je četverokut $AHCE$ paralelogram. Zato je $\vec{AH} = \vec{EC}$.

Dužina $\overline{SP}$ je srednjica trokuta BCE , te je, prema P.3., $\vec{EC} = 2\vec{SP}$, to jest $\vec{AH} = 2\vec{SP}$.

Isto se tako dokažu i ine dvije jednakosti poučka. Ovaj se poučak najčešće izriče skalarno, u obliku: udaljenosti ortocentra od jednog vrha trokuta jednaka je dvostukoj udaljenosti središta trokuta opisane kružnice od nasuprotne stranice. Međutim, ovako izrečen poučak je "jači", jer, osim jednakosti udaljenosti, on govori i o usporednosti pripadnih dužina.

P.11. Težište (T), ortocentar (H) i središte trokutu opisane kružnice (S) su točke istog pravca, pri čemu vrijedi $\vec{HT} = 2\vec{TS}$.

Dokaz. Neka se dužina $\overline{SH}$ i težišnica $\overline{AP}$ sijeku u točki T , kao na sl. 3. Dokažimo da je T težište trokuta ABC . Kako je $\overline{SP} \parallel \overline{AH}$, to je $\sphericalangle SPT = \sphericalangle HAT$, što je, uz $\sphericalangle PTS = \sphericalangle ATH$, dovoljno da su trokuti PTS i ATH slični. Prema P.10. vrijedi $\vec{AH} = 2\vec{SP}$, zbog čega je $\vec{AT} = 2\vec{TP}$. Vidimo da točka T dijeli težišnicu $\overline{AP}$ u omjeru 2:1, zbog čega je T težište trokuta ABC . Sada je, zbog sličnosti, $\vec{HT} = 2\vec{TS}$, čime je poučak dokazan.

Pravac koji sadrži točke S, T i H nekog trokuta zove se Eulerov pravac toga trokuta.

P.12. Ako se u trokutu ABC podudaraju dvije od točaka S, T i H , tada se i treća od tih točaka podudara s tim dvjema.

Dokaz. Prema P.11. vrijedi

$$\vec{HT} = 2\vec{TS} \iff \vec{HS} = 2\vec{ST}.$$

Ako se dvije od navedenih točaka podudaraju, tada je jedan od vektora $\vec{TS}, \vec{HT}$, ili $\vec{HS}$ nulvektor. Međutim, tada su i ina dva od tih vektora također nulvektori, što je moguće samo ako se i treća točka podudara s inim dvjema.

P.13. Ako se u trokutu ABC točke S i H podudaraju, tada je trokut jednakostraničan.



Dokaz. Kako je $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ i $\overline{SD} \perp \overline{BC}$, te ako je $S \equiv H$, tada se težišnica i visina povučene iz vrha A podudaraju. To isto vrijedi i za težišnice i visine iz ina dva vrha. Trokut kojemu se težišnice podudaraju s visinama jest jednakostraničan.

P.14. Ako se u trokutu dvije od točaka S , T i H podudaraju, tada je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Tvrdnja poučka neposredno slijedi iz P.12. i P.13.

Ovaj poučak je obrat poznatog poučka: težište, ortocentar i središte jednakostraničnom trokutu opisane kružnice padaju u istu točku.

P.15. U trokutu ABC vrijedi

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SH}.$$

(Hamiltonov poučak)

Dokaz.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} &= \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TC} \\ &= 3\overrightarrow{ST} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) = \overrightarrow{SH}. \end{aligned}$$

U ovom smo kratkom dokazu koristili tvrdnje poučaka P.11. i P.6.

P.16. Četverostruki zbroj kvadrata duljina težišnica trokuta jednak je trostrukom zbroju kvadrata duljina stranica toga trokuta.

Dokaz. Prema P.8. vrijedi

$$\begin{aligned} (2\overrightarrow{AP})^2 + (2\overrightarrow{BQ})^2 + (2\overrightarrow{CR})^2 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})^2 + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})^2, \\ 4(|AP|^2 + |BQ|^2 + |CR|^2) &= 2(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2) \\ &\quad + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}) \\ &= 2(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2) + \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\ &\quad + \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CA}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) \\ &= 2(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2) + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CA}^2 \\ &= 3(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2). \end{aligned}$$

P.17. Ako je O bilo koja točka ravnine, a T težište trokuta ABC , tada vrijedi:

$$9|OT|^2 = 3(|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2) - (|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).$$

Dokaz. Iz P.7. slijedi

$$(3\overrightarrow{OT})^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2,$$

a odatle:

$$9|OT|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 + 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}).$$

Kako je

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

to je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}^2 &= \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OA}^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} \\ \Rightarrow 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= |OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2. \end{aligned}$$

Isto je tako

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= |OB|^2 + |OC|^2 - |BC|^2, \\ 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} &= |OC|^2 + |OA|^2 - |CA|^2. \end{aligned}$$

Zbog toga je

$$9|OT|^2 = 3(|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2) - (|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).$$

P.18. Duljine stranica trokuta su a , b i c , a R je polumjer trokutu opisane kružnice. Za udaljenost središta i težišta trokuta vrijedi:

$$|ST|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dokaz. Ako u P.17. za točku O uzmemo središte trokutu opisane kružnice (S), tada zbog $|OA| = |OB| = |OC| = R$, tvrdnja tog poučka prelazi u tvrdnju koju treba dokazati.

