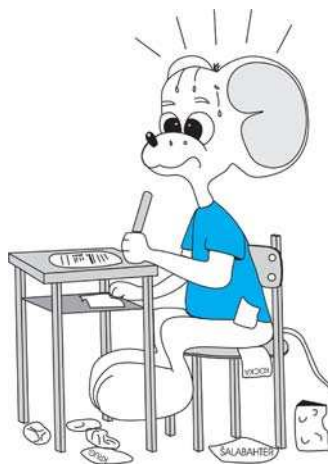


Kako načiniti pismeni ispit iz poznavanja trigonometrijskih funkcija



Ela Rac–Marinić–Kragić, Zagreb

Kod sastavljanja ovog testa osnovna mi je ideja bila zadati takav test kod kojeg bi učenik više pažnje posvetio osnovnim svojstvima trigonometrijskih funkcija i jediničnoj kružnici nego izračunavanju kompleksnih zadataka u kojima mora voditi brigu o nekoliko stvari istovremeno, kao i o tome da ne pogriješi u izračunu.

Zadatke na zaokruživanje naizgled je lakše rješavati od standardno postavljenih zadataka. No u praksi to i nije tako. Za loše riješen zadatak učenik dobiva negativne bodove. Uz to sam se trudila da u 4 ponuđena odgovora budu 'kukavičja jaja', to jest odgovori koji su jako blizu rješenju ili prvi tren odgovaraju. Učenik koji dobro ne poznaje gradivo jako će lako napraviti pogrešku.

Ovaj se test sastoji od dvaju dijelova. U prvom su dijelu zadaci na zaokruživanje. Prvotno sam zamislila da se za dobro riješen zadatak dobiju dva boda, a za loše riješen jedan negativan bod, a ako učenik nije rješavao zadatak, tada on ne donosi bodove. No naknadno sam uvidjela da je to loš omjer bodova pa sam promijenila bodovanje tako da

se za dobro riješen zadatak dobiju 3 pozitivna boda, za loše riješen zadatak jedan negativan bod. Time sam u konačnici dobila puno bolje rezultate. Ni omjer 4 : 1 također nije loš, ali htjela sam pod svaku cijenu natjerati učenike da ne zaokružuju nasumice.

Dva su razloga imala ključnu ulogu kod zamišljanja ovakvog pismenog ispita znanja.

1. Smatram da je previše dugačkih i zamornih zadataka u kojima se puno računa, a malo brige vodi o bitnim stvarima, svojstvima, pojmovima i definicijama. Upravo kod trigonometrijskih funkcija postoji puno elemenata koji se brzo i jednostavno daju ispitati, ne zahtijevaju uporabu zamornog i dosadnog računa, a govore puno o poznavanju teme. Jedinična kružnica, radijani, osnovne definicije trigonometrijskih funkcija i njihovi grafovi, grafičko rješavanje jednostavnih jednadžbi i nejednadžbi, parnost i periodičnost, kao i izračunavanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija pomoću osnovnih vrijednosti u prvom kvadrantu te osnovne relacije između trigonometrijskih funkcija — to su sve teme koje se daju lijepo ispitati dobro smišljenim

i ne predugačkim zadacima. Također je važno učenika naučiti koristiti kalkulator i u svim zadacima u kojima ne zna što bi započeo uzeti kalkulator ili skicirati graf te metodom pokušaja i pogreške doći na pravi put. Dakle, kod učenika treba pokušati stvoriti intuitivni pristup — naći rješenje pa onda provjeri je li ono stvarno rješenje i pokaži zašto je. Mislim da se ovakvim zadacima i to postiže.

2. Većina učenika trećeg razreda prirodoslovno-matematičke gimnazije (program A, tjedna satnica matematike 5, 5, 7, 7) upisat će se na tehničke fakultete gdje se prijamni ispiti sastoje od testova na zaokruživanje. Smatrala sam da je dobro već sada početi vježbati takve tipove zadataka jer će učenici dobiti osnovni dojam kako i na koji način ih treba rješavati, a savladat će i “trikove” pomoću kojih mogu ubrzati i pojednostavniti postupke rješavanja takvih zadataka.

Naravno, početnu ideju dao mi je članak iz **MŠ**-a broj 21, Završni ispit u kanadskoj provinciji Britanska Kolumbija. Ljepota i jednostavnost zadataka kojima se jako puno može provjeriti nešto je što profesora matematike ne može ostaviti ravnodušnim.

Drugi dio testa sastoji se od zadataka koji su ‘standardni’, zadaci na kakve su učenici već navikli, u kojima se traže dokazi, izvodi ili izračuni, gdje nije bio toliko važan točan rezultat koliko način postavljanja i izvođenja zadatka. Ti zadaci donose samo pozitivne bodove. I kod njih sam se trudila da izbjegnem previše računa, a težište bacim na osnovna svojstva, dokaze, izvode ili ideje u postavljanju zadatka. U takvim zadacima nije u redu da se učenik kazni negativnim bodom samo zato što je pogriješio u računu ili u nekom od koraka iako je ideja ili izvod dobro zamišljen. Zadaci su stupnjevani bodovima od 2 do 4 prema zahtjevnosti ili složenosti.

Ovaj pismeni ispit rješavao se dva školska sata. Ukupan maksimalni broj bodova bio je 54 — po 3 boda na svakom od 12 zadataka iz prvog dijela testa i ukupno 18 bodova na drugom dijelu testa. Kriterije sam postavila

prema sljedećoj tablici:

nedovoljan	0 — 23
dovoljan	24 — 30
dobar	31 — 38
vrlo dobar	39 — 46
odličan	47 — 54

Ovaj test pokazao je i zanimljive rezultate — bilo je puno manje negativnih ocjena nego inače, ali isto tako i manje odličnih ocjena. I na kraju ono što će zanimati nastavnike — trebalo mi je oko 12 sati (ili više?) da sastavim ovaj test, riješim i iskorigram sve pogreške. Ispravljanje je išlo puno brže nego samo sastavljanje.

Još sam jednom ponovila ovakav tip testa — kod cjeline vektora. Taj drugi pokušaj dao je nešto bolje rezultate nego prvi test. Možda stoga što su učenici već počeli stvarati naviku rješavanja takvih tipova zadataka. U svakom slučaju nije mi žao utrošenog vremena. Stekla sam novo iskustvo u smišljanju zadataka za pismene ispite.

Zadaci skupine A

I. dio ispita

Zadatke rješavaj na svom papiru i zatim zaokruži slovo ispred ispravnog odgovora. Točno rješenje donosi 3 boda, a pogrešno 1 negativan bod.

1. Odredi pomak kod funkcije:

$$f(x) = 2 \sin(2x + \pi).$$

A π B 2π C $\frac{\pi}{2}$ D $-\frac{\pi}{2}$

2. Izrazi u radijanima:

$$\arccos\left(\sin\left(570^\circ - \frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

A $-\frac{2\pi}{3}$ B $\frac{5\pi}{6}$ C $3\frac{\pi}{2}$ D $\frac{\pi}{4}$

3. Koliki je osnovni period funkcije:

$$f(x) = 2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)?$$

A $\frac{\pi}{3}$ B 6 C $\frac{\pi}{6}$ D 3

4. Koliko iznosi $\sec 2x$, $x = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}}$?

A 2 B 1 C $\frac{\pi}{3}$ D -1

5. Izraz $\sec^2 x - 1$ na cijelom je području definicije jednak izrazu

A $\cos^2 x$ B $\operatorname{cosec}^2 x$ C $\operatorname{tg}^2 x$ D $\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x}$

6. Riješi jednadžbu $2^{\sin(-2x)} - 2^{\cos 2x} = 0$ za $x \in \langle -\pi, 0 \rangle$. Zbroj svih rješenja iznosi:

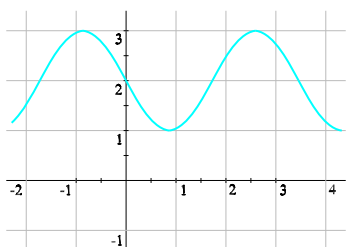
A $-\frac{\pi}{4}$ B $-\frac{5\pi}{4}$ C $-\frac{3\pi}{4}$ D $-\frac{3\pi}{2}$

7. Riješi jednadžbu $3 \sin 2x = 2x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ (zaokruženo na 2 decimale).

A -0.62, 0, 0.62 B -0.52, 0.52
C -1.14, 0, 1.14 D -2.24, 0, 2.24

8. Odredi jednadžbu funkcije čiji je graf na slici 1:

A $f(x) = 2 + \sin x$ B $f(x) = 2 - \sin x$
C $f(x) = 2 + 2 \sin x$ D $f(x) = 2 - \sin 2x$



Slika 1.

9. Ako je $\operatorname{tg} t = \frac{1}{2}$, onda je $\frac{3 \sin t - \cos t}{\sin t + \cos t}$.

A $\frac{1}{2}$ B 2 C $\frac{1}{3}$ D -1

10. Tijek izmjeničnog napona dan je jednadžbom $u = U_0 \sin \omega t$, gdje je u trenutna vrijednost napona, U_0 maksimalna vrijednost napona, $U_0 = U\sqrt{2}$, U efektivna vrijednost napona i $\omega = 2\pi f$, f frekvencija izražena u Hz. Kako glasi jednadžba trenutne vrijednosti napona za izmjeničnu struju od 220 V efektivnog napona s frekvencijom $f = 50$ Hz?

A $u = 311 \sin 100\pi t$ B $u = 156 \sin 100\pi t$
C $u = 311 \sin 100t$ D $u = 156 \sin 100t$

11. Za svaki kut α vrijednost izraza $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha - 1$ ima vrijednost

A -1 B 0 C 1 D $\sin^2 \alpha + 1$

12. Apscisa točke D na jediničnoj kružnici je -0.8. Odredi udaljenost točke D od osi x.

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{3}{5}$ C $\frac{2}{3}$
D nema dovoljno podataka.

II. dio ispita

Zadatke rješavaj na svom papiru i priloži sve papire s imenom i prezimenom. Svaki od ovih zadataka donosi samo pozitivne bodove; 2, 3 ili 4.

13. (2b) Ako je $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 2m$, $m < 0$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, koliko je $\cos 2\alpha$?

14. (3b) Zadana je funkcija

$$f(x) = \frac{x^3 + \sin 3x}{\cos 3x + x^2}.$$

a) Odredi parnost funkcije.

b) Odredi osnovni period funkcije ako je periodična, a ako nije periodična, dokaži to.

15. (4b) Na intervalu $[0, 2\pi]$ riješi nejednadžbu:

$$\sin x > \cos x.$$

16. (4b) Izračunaj:

$$\frac{\left[\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right) \sin \frac{35\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} \operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right] \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}.$$

17. (2b) Ako je $\cos t = \frac{7}{25}$, $t \in \langle -4\pi, -\frac{7\pi}{2} \rangle$, koliko je $\operatorname{tg}(-t)$?

18. (3b) Grafički prikaži funkciju:

$$f(x) = \sqrt{1 - \cos^2(3x - \pi)}.$$

Zadaci skupine B

I. dio ispita

Zadatke rješavaj na svom papiru i zatim zaokruži slovo ispred ispravnog odgovora. Točno rješenje donosi 3 boda, a pogrešno 1 negativan bod.

1. Koliki je osnovni period funkcije:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(1 - \frac{\pi x}{6}\right)?$$

A 2 B 3 C 12 D 6

2. Odredi pomak kod funkcije:

$$f(x) = \pi \operatorname{ctg}(\pi x + \pi).$$

A $\frac{\pi}{2}$ B -1 C 1 D 2

3. Funkcija $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x}$ nije definirana za:
- A $x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ B $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 C $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ D $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4. Koliko iznosi:

$$\operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)?$$

- A 0 B 1 C 0.5 D -0.5

5. $\operatorname{cosec}(\arcsin(\sin(30^\circ)))$ iznosi:

- A -1.12 B 1.12 C 2.24 D -2.24

6. Ako je $3 \operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 2x$, tada je $\sin(-2x)$, $x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}, \pi \right\rangle$:

- A -0.5 B -1 C $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D 0.5

7. Koliko je:

$$\left(-\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} + \pi^{1+\cos \pi} + \sin \frac{\pi}{6}?$$

- A -1 B 0 C 1 D 2

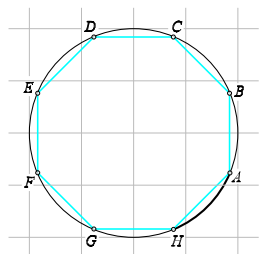
8. Riješi jednadžbu $\sqrt{3} + 2 \cos x = 0, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

- A $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ B $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$
 C $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{4}$ D $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

9. Odredi temeljni period funkcije:

$$f(x) = \sin \pi x + \cos \frac{2\pi x}{3} + \operatorname{tg} x.$$

- A nije periodična B π C 2π D 2



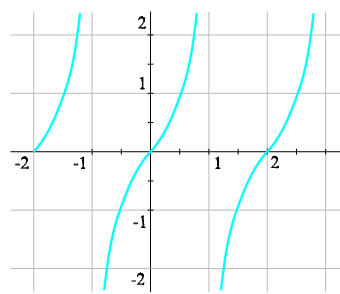
Slika 1.

10. U brojnu kružnicu upisan je pravilni osmerokut kao na slici 1. Tada su rubne točke istaknutog luka $\widehat{HA}$ rubovi intervala:

- A $\left[-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right]$ B $\left[\frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right]$
 C $\left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{8}\right]$ D $\left[-\frac{13\pi}{8}, -\frac{15\pi}{8}\right]$

11. Jednadžba grafa funkcije prikazane na slici 2 je:

- A $\operatorname{tg}(0.5\pi x - \pi)$ B $\operatorname{tg}(\pi x) - 1$
 C $\operatorname{tg} 0.5(\pi x - \pi)$ D $\operatorname{ctg} \pi x$



Slika 2.

12. Kotač radijusa 36 cm okrene se jedanput svakih 6 sekundi. U trenutku $t = 0$ točka P na rubu kotača dodiruje zemlju. Nakon 10.75 minuta točka P je od zemlje udaljena:

- A 0 cm B 36 cm C 72 cm
 D 10.35 cm

II. dio ispita

Zadatke rješavaj na svom papiru i priloži sve papire s imenom i prezimenom. Svaki od ovih zadataka donosi samo pozitivne bodove; 2, 3 ili 4.

13. (2b) Ako je $\sin \alpha = -\frac{1}{4}, \alpha \in \left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$, bez upotrebe kalkulatora izračunaj $\operatorname{tg}(-\alpha)$?

14. (2b) Dokaži identitet:

$$\left(\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) \left(\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}\right) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}.$$

15. (3b) Na brojnoj kružnici prikaži rješenja sustava $\frac{1}{2} < |\sin t| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. (3b) Da li funkcija $f(x) = \cos(\sin x)$ na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ raste ili pada? Obrazloži!

17. (4b) Grafički prikaži funkciju:

$$f(x) = \sqrt{\sec^2 2x - 1}.$$

18. (4b) Za koje vrijednosti cijelog broja n funkcija $f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{5}{n}x$ ima period 3π ?

* * *