Pristup eksponencijalnoj funkciji u trogodišnjim strukovnim školama

Šime Šuljić, Pazin

"Neke osnovne ideje o eksponencijalnom i logističkom rastu trebale bi pripadati osnovnim znanjima svakog bolje obrazovanog građanina (za razliku od metoda rješavanja eksponencijalnih i logaritamskih jednadžbi, koje zasigurno ne pripadaju tim osnovnim znanjima)."

Zvonimir Šikić, *Poučak*, broj 13/IV 2003.

Nakon pročitanog naslova članka i umetnutog citata svaki bolji poznavatelj profila učenika trogodišnjih strukovnih škola, a nastavnici matematike koji predaju u tim školama to sigurno jesu, možda će zamijetiti da ti učenici baš ne spadaju u kategoriju bolje obrazovanih građana. Ipak, i ta kategorija učenika trebala bi steći matematičko obrazovanje koje će im omogućiti bolje razumijevanje svijeta u kojem se nalaze. U programu nastave matematike drugog razreda srednjih strukovnih škola javlja se cjelina *"Eksponencijalna i logaritamska funkcija"*. Ako se onim učenicima koji nastavljaju matematičko obrazovanje naglasak sa čiste tehnike rješavanja eksponencijalnih i logaritamskih jednadžbi prebacuje na razumijevanje i primjenjivost eksponencijalne funkcije, onda pogotovo na taj način treba približiti nastavu matematike učenicima trogodišnjih srednjih škola. Misao profesora Šikića zapravo je izvanredna ideja vodilja za nužne promjene koje bi trebale zahvatiti nastavu matematike i u strukovnim školama.

Stvarnost u kojoj se odvija nastava matematike

Svi mi prošli smo fakultetsko obrazovanje koje je itekako brinulo o stručnom i metodičkom uvođenju svakog matematičkog pojma. Došavši u učionicu često se susrećemo s ne baš *"idealnim laboratorijskim uvjetima"* prenošenja tih znanja. A u trogodišnjim strukovnim školama to se pogotovo može osjetiti. Postoji čitav niz opće poznatih problema nastave matematike koji su zajednički svim školama i obrazovnim profilima:

— nedovoljno razumijevanje, predstavljanje i operacionalizacija apstraktnih matematičkih pojmova i činjenica,
— problem uporabe matematičkih simbola i formula s razumijevanjem,
— nedovoljna uvježbanost,
— "rupe" u znanju učenika u predmetu koji je izrazito kumulativan,
— nesistematiziranost znanja,
— ponekad se ne vidi praktičnost i svrhovitost matematike,
— učenik je često pasivan sudionik procesa u pretežito frontalnom radu,
— nastava matematike lako skrene u čistu tehniku rješavanja zadataka i jednadžbi, umjesto da je naglasak na rješavanju problema.

U strukovnim školama treba još dodati specifične problema da bi se razumjelo u kakvim se okolnostima odvija nastava matematike. Navedimo samo one najčešće i najuočljivije:

— visoka koncentracija učenika slabog predznanja u razredu,
— nemotiviranost učenika za učenje i rad,
— učenici nisu u stanju pratiti ni kraće izlaganje nastavnika,
— nedisciplinirano st,
— nezanemariv broj učenika problematičnog ponašanja,
— sustav koji od učenika ne traži odgovornost; nema vanjske valorizacije znanja i sve se, na žalost, prečesto svodi na dobro znanu "profesore, daj dvojkicu".

Programi i udžbenici

Teškoća rada u strukovnim školama donekle proistječe i iz samih programa. Stječe se dojam da su programi strukovnih škola samo redukcija gimnazijskih programa s pokojom cjelinom primjene matematike. Ne vidi se potreba i smisao učenja nekih cjelina u pojedinim obrazovnim smjerovima. Ima previše ponavljanja dijelova algebre (1. razred), a uopće nema tema koje bi povećale motiviranost i pokazale se kao korisna znanja, kao što su elementi statistike, kombinatorike i vjerojatnosti. Naravno da se te teme ne bi trebale uvoditi na teorijskom nivou kakav mi poznajemo. Neka poglavlja pak ne predstavljaju zaokruženu i smislenu cjelinu. Stoga bi trebalo napraviti ozbiljnu inventuru postojećih matematičkih programa u strukovnim školama.

Iako bi se moglo reći kako možemo biti sretni jer smo posljednjih godina konačno dobili udžbenike za strukovne škole, ipak ne možemo biti posve zadovoljni. Udžbenici uglavnom ne otklanjaju probleme koji proistječu iz programa, nego ih još i potenciraju. Događa se da nakon uspješnog i kvalitetnog izdanja nekog udžbenika za gimnazije i tehničke ili ekonomske škole slijedi izdanje za strukovne škole. Pritom se često događa to da umjesto posebno osmišljenog projekta, imamo samo mehaničku redukciju na lakše sadržaje i zadatke. Unatoč tomu, udžbenici su i dalje preteški, nerazumljivi i neprilagođeni strukturi učenika. A, ako i jesu "lakši", nemaju nimalo problemskog i suptilnog teorijskog pristupa, već se njihova "lakoća" sastoji u tome da su do u detalje opisani tehnički koraci rješavanja zadataka, svodeći tako matematiku na nekakav larpurlartizam prebacivanja, proširivanja, izlučivanja, skraćivanja, pojednostavnjivanja itd. Uvelike se inzistira na matematičkom formalizmu umjesto intuitivnosti i prirodnog pristupa. Događa se da se iz udžbenika ne razaznaje kojoj je struci namijenjen.

Uvod u eksponencijalnu funkciju

Od svih triju razreda većina bi nastavnika zasigurno imala najmanje primjedbi na programe i udžbenike drugog razreda. Međutim, i tu bi se dalo mnogočemu drugačije pristupiti. Tako je i sa cjelinom *Eksponencijalna i logaritamska funkcija*. Svi udžbenici, nakon nužnog ponavljanja računanja s potencijama, uvode eksponencijalnu funkciju čistim matematičkim formalizmom i to "s neba pa u rebra". Već u samom uvodu naići ćemo na otprilike ovakvu formulaciju:

Neka je a pozitivan realan broj različit od jedan. Funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ *zadanu formulom* $f(x) = a^x$ *nazivamo eksponencijalnom funkcijom baze a.*

Nakon kraćeg pojašnjenja slijede primjeri jednostavnih funkcija koje učenici trebaju grafički prikazati uz pomoć tablica. Samo neki udžbenici imaju tek na kraju cjeline primjere iz prirode ili financija. Poznavajući konkretnu situaciju u jednom razredu smjera prodavač bilo mi je jasno da učenici neće uvidjeti smislenost rada krenemo li tim uhodanim obrascem. Pokazala se potreba za nekim konkretnim primjerom, odnosno problemom i prije nego nam je na raspolaganju nova matematička spoznaja za njegovo rješavanje. Osim toga, učenici bi trebali biti aktivni u rješavanju problema, što će u frontalnom obliku rada i predavačkoj nastavi izostati. Stoga se kao oblik rada nametnuo rad u grupama na problemu danom u radnom listiću za učenike.

Radni list: **Uvod u eksponencijalnu funkciju**

Problem iskazan u ovom radnom listu neki bi učenici sigurno shvatili i bez intervencije nastavnika. Međutim, bolje je pojasniti problem višegodišnjeg ukamaćivanja, koji se, kad ga računamo iz godine u godinu, svodi na postotni račun, da bi svi učenici s razumijevanjem krenuli u popunjavanje dane tablice u zadatku 2. Dakle, treba ponoviti postotni račun. Učenicima se još može reći da je kamatna stopa od 20% previsoka u odnosu na stvarno stanje na tržištu novca. Ovdje je uzeta zbog toga da više dođe do izražaja nagli rast eksponencijalne funkcije, kako u tablici, tako i na priloženom grafu. Samo tablicu treba pomno izračunavati redak po redak, da bi učenici baš osjetili što se s ulogom stvarno događa. Učenici vole to izračunavanje. Upozorimo li ih i na pravilno zaokruživanje konačnih iznosa s točnošću u lipu, bit će vrlo zadovoljni točnim odgovorom. U suprotnom, ne damo li im nikada priliku za takav proračun, neki učenici ne razumiju što kasnije kod složenog kamatnog računa uopće računaju. U pitanju 3. i 4. važno je otkriti bazu eksponencijalne funkcije i uočiti da se postupak može značajno pojednostavniti. Ovdje je, naravno, riječ o dekurzivnom kamatnom faktoru, ali taj pojam uopće ne treba spominjati do trećeg razreda. Peto je pitanje ključno i učenicima teško, a treba ih navesti na otkriće formule eksponencijalne funkcije. I to najprije posebnog oblika $f(10) = 10\,000 \cdot 1.20^{10}$, a potom oblika $f(x) = 10\,000 \cdot 1.20^x$. Ovdje je nužna razredna rasprava o učeničkim rješenjima. Svakako je dobro spomenuti da bi formula višegodišnjeg ukamaćivanja bila oblika $f(x) = A \cdot b^x$, gdje je A početni ulog, a b broj $1 + p/100$. Nakon ovog uvodnog sata nastavlja se s definicijom i upoznavanjem sa svojstvima eksponencijalnih funkcija kroz jednostavne primjere: $A = 1$, $b = 2, 3, 0.5, 1/3$, itd.

RADNI LIST: **Uvod u eksponencijalnu funkciju**

Primjer. Investicijski fond početnom ulogu od **10 000,00** kn krajem godine pripisuje dobit od **20%**. Ulagač prema ugovoru ne može podizati ulog i dobit prije ugovorenog roka od **10** godina. Krajem svake godine ukupnoj svoti pripisuje se novih 20% dobiti. Na koju će svotu narasti ulog od 10000,00 kn nakon deset godina?

1. Prisjetimo se formule postotnog računa. 20% od 10 000 je 10 000 x (20/100) = 2 000.
Taj iznos se pripisuje ulogu: 10 000,00 + 2 000,00 = 12000,00.
2. Popuni zadanu tablicu da bi dobio odgovor na pitanje na koju će svotu narasti ulog od 10000,00 kn nakon deset godina.

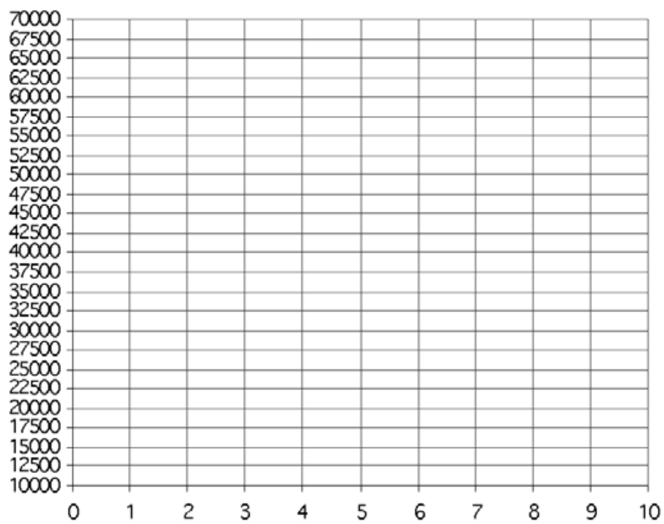
godine	iznos na početku godine	pripisana dobit	iznos na kraju godine
0	-	-	10 000,00
1	10 000,00	2 000,00	12 000,00
2	12 000,00		
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

3. Podijeli svaki iznos na kraju godine s iznosom u prethodnom retku. Je li taj kvocijent uvijek jednak i koliko iznosi? ___________________

4. Može li se, ako znamo taj kvocijent, lako izračunati iznos na kraju neke godine na temelju iznosa iz prethodne godine? Kako? _________________________________ Provjeri na nekoliko redaka tablice!

5. Može li se odjednom izračunati iznos na kraju desete godine iz početnog iznosa bez da se računa godina po godina? Napiši formulu po kojoj bi se izračunao taj iznos? *f(10)*=________________. Kako bi glasila formula za izračunavanje iznos na kraju *x*-te godine? *f(x)*=______________________. Provjeri!

6. Nacrtaj graf rasta vrijednosti uloga. Na osi x prikaži godine, a na osi y iznos u kunama.



RADNI LIST: **Eksponencijalni rast**

Primjer 1. Vlasnik trgovine želi svake godine povećavati promet po stopi od 6% u odnosu na proteklu godinu. To znači da će svakih 100 kn rasti po formuli $f(x)=100\cdot1.06^x$, gdje je x vrijeme u godinama. Izračunaj vrijednosti funkcije (promet) za godine dane u tablici:

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$	100						

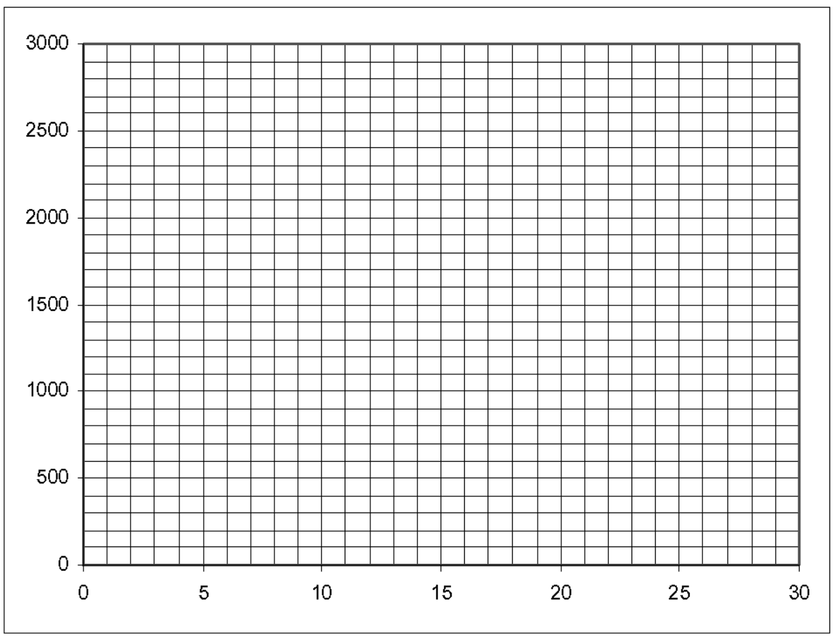
Prikaži te podatke grafički na zadanom grafikonu. Os x predstavlja godine, a os y iznos u kunama. Odgovori na pitanja.

1. Koliko je puta promet premašio početni iznos nakon 30 godina? ________________________
2. Iz grafa očitaj nakon koliko se godina promet udvostručio. ____________________________
3. Odredi računski promet u 13. godini. ____

Primjer 2. Pretpostavimo sada da bi vlasnik htio povećavati promet iz godine u godinu po dvaput većoj stopi tj. za 12% u odnosu na svaku prethodnu godinu. Tada rast 100 kn opisuje formula $f(x)=100\cdot1.12^x$. Popuni tablicu i podatke prikaži grafički.

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$	100						

1. Iz grafa očitaj nakon koliko se godina promet udvostruči. ________________________________
2. Pokušaj što preciznije računski odrediti vrijeme koje je potrebno da se promet udvostruči.
   ____
3. Iz grafa očitaj nakon koliko godina rast prometa sa stopom 12% dostigne onu razinu koju je dostigao sa stopom od 6% nakon 30 godina. ____
4. Računski izračunaj promet u šesnaestoj godini. ____
5. Koliko je puta veći promet u 10. godini s rastom po stopi 12% od onoga s rastom 6%? ____________
6. Koliko je puta veći promet u 30. godini s rastom po stopi 12% od onoga s rastom 6%? ____________
7. Znači li dvaput veća stopa i dvaput veći rast u svakom trenutku? Obrazloži!
   ____



Radni list: Eksponencijalni rad

Potom se ponovo možemo vratiti jednom satu s radnim listićem da bi se još jednom vidjela primjena eksponencijalne funkcije, odnosno bolje upoznala priroda eksponencijalnog rasta. Dva primjera sa svojim zadacima prilično su jednostavna i učenici će ih u grupnom radu bez nekih dodatnih objašnjenja moći riješiti. Ovdje je riječ o idealiziranom rastu prometa po uvijek istoj stopi, čega u stvarnosti nema, ali ima u raznim projekcijama i planovima. U medijima se stalno govori o planiranoj stopi gospodarskog rasta, rastu BDP-a, planiranom rastu poduzeća itd. Stopa rasta je zapravo toliko svakodnevna da bi ovi primjeri možda bili korisni za sve učenike, a ne samo one ekonomskog obrazovnog područja. Cilj ovog radnog listića je da učenik nauči čitati graf i iz njega procjenjivati. Kroz graf, ali i kroz zadane tablice, bit će naglašen drastični učinak male promjene baze eksponencijalne funkcije na njezine vrijednosti za veće vrijednosti argumenta. Tu se može izvući i životna pouka da u financijama treba biti na oprezu kada je kamatna stopa naoko samo malo veća.

Posebnu pažnju treba posvetiti drugom zadatku u primjeru 2. Dakle, potrebno je što preciznije nizom pokušaja na kalkulatoru odrediti vrijeme udvostručenja prometa. Za početnu vrijednost aproksimativnog postupka učenik će uzeti procijenjeni broj godina očitan iz grafa (zadatak 1.). Učenicima je zabavan aproksimativan postupak određivanja varijable iz zadane vrijednosti eksponencijalne funkcije i primijetio sam da se vole natjecati u brzini i preciznosti. Potrebu uvođenja logaritma kasnije možemo povezati s ovim oprobanim primjerom. To može biti i prvi primjer primjene logaritama!

I za kraj

Prisjetimo se još jednom na kraju kojim je učenicima ovo namijenjeno. Pretjerujem li ako kažem da onaj tko nije radio u strukovnim razrednim odjelima i ne poznaje težinu naše profesije? Vjerojatno da, jer svaki uzrast učenika i obrazovni smjer nosi svoje probleme. No, moram reći da je zadovoljstvo vidjeti učenike kojima često nije moguće "stati na kraj", da na kraju zdušno računaju, crtaju, pišu i iznose zaključke. I nije problem samo u disciplini, koja se na ovaj ili onaj način ipak postigne, nego u promjeni odnosa prema sadržaju rada. Kod pripreme pojedine lekcije možemo istaknuti na desetke uzvišenih obrazovnih i odgojnih ciljeva, ali kako će se oni realizirati ako je učenik samo pasivni promatrač i slušatelj?!

Rješenja rebusa

br. 21, str. 41:

1.

$$\begin{array}{rcrcr} 2 & \times & 2 & = & 4 \\ + & & + & & : \\ 10 & - & 2 & = & 12 \\ \hline 20 & + & 4 & = & 16 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcrcr} 76 & \times & 3 & = & 228 \\ + & & \times & & : \\ 11 & - & 9 & = & 2 \\ \hline 87 & + & 27 & = & 114 \end{array}$$

br. 24, str. 158:

3.

$$\begin{array}{rcrcr} 84 & \times & 3 & = & 252 \\ + & & \times & & : \\ 12 & - & 10 & = & 2 \\ \hline 96 & + & 30 & = & 126 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rcrcr} 8 & \times & 3 & = & 24 \\ + & & + & & : \\ 2 & \times & 4 & = & 8 \\ \hline 10 & - & 7 & = & 3 \end{array}$$