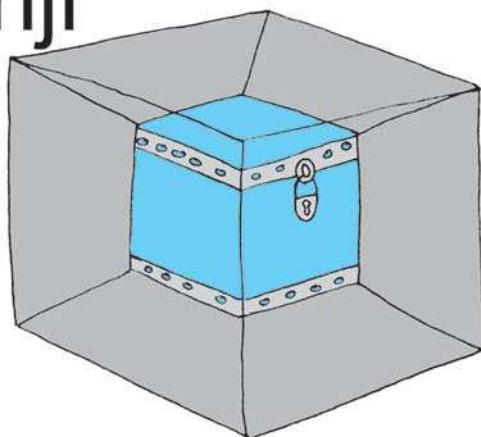




O četverodimenzionalnoj geometriji

iz knjige

“Matematička
čitanka”



Vladimir Devidé, Zagreb

Da se malo utješimo i ohrabrimo prije skoka u četvrtu dimenziju, razmislimo u kakvu će se položaju naći dvodimenzionalni matematičari kad odluče da treba zakoraknuti u treću dimenziju!

Dakako, opet nije posrijedi pitanje postoje li “fizički” dvodimenzionalna bića, već o tome o kakvu je koraku riječ pri prijelazu od planimetrije na stereometriju.

Zamislimo, dakle, ravninu nastanjenu dvodimenzionalnim matematičarima (nekim sasvim plosnatim bićima poput idealnih stjenica), koji nemaju direktnog zora trodimenzionalnog prostora u kojemu njihov svijet, njihova ravnina, leži, u koji je “uronjena”, i koji nemaju mogućnost kontakata ni komuniciranja s prostorom izvan svoje ravnine. Pri izgradnji stereometrije oni će se suočiti s analognim teškoćama koje nas očekuju pri izgradnji četverodimenzionalne geometrije. Oni ne “vide” da pravci u prostoru mogu biti mimosmjerni – u njihovom se svijetu tako nešto ne može dogoditi. (A znamo da i ljudi teško vjeruju u nešto što sami nisu vidjeli i čega u svom domu nemaju.) Dvodimenzionalni matematičari ne “vide” da mo-



gu postojati tri međusobno okomita pravca koji prolaze istom točkom.

Oni, nadalje, imaju ovo iskustvo: “Uočimo dva (“materijalna”) pravokutnika, jedan u drugome. Unutarnji se u našem svijetu ne može izvaditi a da se vanjski ne rasklopi ili razori.”

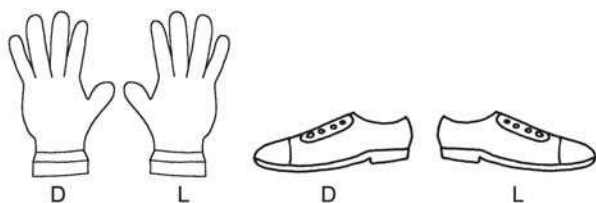
Znajući to, oni svoj novac i dragocjenosti čuvaju u takvoj blagajni – pravokutniku; ako je ona dovoljno jaka i brave sigurne, provalnik iz njihova svijeta neće ih moći pokrasti. No, kako mi iz našeg trodimenzionalnog svijeta gledamo na to? “Trodimenzionalni” provalnik bez po’ muke “podigne” unutarnji pravokutnik – vrećicu s novcem – u prostoru izvan njihove ravnine i može ga vratiti u tu ravninu izvan vanjskog pravokutnika, a da vanjski

nije ni rasklopio ni ošteti.

Opisat ćemo analognu situaciju na nivou višem za jednu dimenziju. Naše je iskustvo: "Ako imamo dva (materijalna) pravokutna paralelepipeda, jedan u drugom, unutarnji se u našem trodimenzionalnom svijetu ne može izvaditi, a da se vanjski ne rasklopi (otvori) ili razori." Znajući to, mi svoj novac i dragocjenosti čuvamo u blagajni – paralelepipedu; ako je ona dovoljno jaka i brave sigurne, provalnik iz našeg svijeta neće nas moći pokrasti.

No kako na to gledaju "bića" iz četverodimenzionalnog prostora? Četverodimenzionalni provalnik bez po muke "podigne" unutarnji paralelepiped, kutiju s novcem, u četverodimenzionalni prostor izvan našeg trodimenzionalnog, i može ga vratiti u naš prostor izvan vanjskog paralelepipeda, a da vanjski nije ni rasklopio ni ošteti.

Da je tome zaista tako, *nije* očito (nama); ali to mi, trodimenzionalni matematičari, možemo *dokazati*. Isto tako, da trodimenzionalni provalnik na opisani način može pokrasti dvodimenzionalne matematičare, njima *nije* očito, ali oni to *moгу* dokazati. Drugi primjer: dvodimenzionalni matematičari zimi nose rukavice; jednu lijevu, na lijevoj ruci, i jednu desnu, na desnoj. Kakogod pomicali lijevu rukavicu po svom prostoru u ravnini, ona će ostati lijevom. Mogu je pretvoriti u desnu jedino tako da je "izvrnu", no time će unutarnja strana lijeve rukavice postati vanjskom stranom tako dobivene desne, i obratno. Još je gore s cipelama jer se one ne daju izvrtati.



Ako dakle, dvodimenzionalni matematičar u dućanu s lošom poslugom kupi par rukavica i zabunom mu prodaju dvije lijeve (pa, što se i ondje događa, kasnije odbiju popraviti vlastitu pogrešku), ne preostaje mu drugo nego da jednu rukavicu nosi izvrtanu, osim... Osim? Osim ako mu pomogne trodimenzionalni matematičar: on će jednu njegovu rukavicu "izvaditi" iz ravnine, zakrenuti je za

180° oko osi paralelne s ravninom i vratiti je u ravninu; time je lijeva rukavica postala desna, a da se njezina vanjska i unutarnja strana nisu izmijenile.

Analogna situacija na nivou višem za jednu dimenziju je ovakva: ako smo dobili dvije lijeve rukavice i ne možemo jednu zamijeniti, morat ćemo jednu nositi izvrtanu da bi nam obje pristajale na ruke. Ali mogao bi nam pomoći četverodimenzionalni matematičar: on će jednu našu lijevu rukavicu (ili cipelu) "izvaditi" iz našeg trodimenzionalnog prostora, zakrenuti je za 180° i vratiti je u naš prostor – kao desnu. Vanjska će strana ostati vanjskom, unutarnja unutarnjom. I opet nam nije očito da je tome zaista tako ali to mi, trodimenzionalni matematičari, možemo dokazati. Isto tako, činjenica da trodimenzionalni matematičar može učiniti opisanu uslugu dvodimenzionalnom, ovom potonjem nije očita, ali on to može dokazati.

Spomenimo još jedan zanimljiv primjer (bez "pravog analogona" za dvodimenzionalna bića).

Lanac ne možemo "otvoriti" a da ne raskinemo nijednu kariku. Zatvorenu petlju (kao na slici) ne možemo razviti u kružnicu, a da je prethodno ne raskinemo. Četverodimenzionalni matematičar (pa i nematematičar) bez muke i bez kidanja može rastaviti lanac na pojedine karike i petlju razviti u kružnicu.



Npr. ovako: spoji neku točku T izvan našeg prostora odsječcima pravca sa svim točkama (kraćeg) luka AB i duž nastale površine "izvadi" luk AB iz našeg prostora itd.

I opet, dakako, nije očito da je tome zaista tako, ali se može dokazati. I tako svi mornari i sve petlje i ne znaju koliko su sretni što žive u trodimenzionalnom svijetu: da žive u četverodimenzionalnome (ili nekom još višedimenzionalnijem), svi bi im se čvorovi rastvorili i svi bi se džemperi raspleli!